ECONOMETRIE

CURS

Cuprins

Capitolul 1 7
Introducere în modelarea econometrică 7
1.1 Ce este econometria? 7
1.2 Ce poate şi ce nu poate realiza econometria 8
1.3 Repere istorice 9
1.4 Concepte 10
1.5 Demers metodologic 15
Capitolul 2. 16
Modelul unifactorial 16
2.1 Relațiile de cauzalitate în economie 16
2.2 Modelul liniar simplu 17
2.2.1 Prezentarea problemei. Exemple din economie 17
2.2.2 Model şi ipoteze 17
2.3 Estimarea parametrilor modelului 19
2.4 Noțiuni privind datele şi soluțiile 21
2.5 Metoda celor mai mici pătrate 21
2.5.1 Interpretarea parametrilor estimați 22
2.5.2 Analiza de regresie şi modalitatea de estimare a parametrilor 23
2.6 Alte metode de estimare 25
Capitolul 3 28
Modelul multifactorial 28
3.1 Cazul liniar multifactorial 28
3.2 Etapele demersului: 29
3.2.1 Specificarea 30
3.2.2 Estimarea parametrilor 31
3.2.3 Interpretarea estimațiilor obținute pentru parametri 33
3.3 Aplicarea modelului econometric multifactorial 34
3.3.1 Datele numerice 34
3.4 Modele neliniare 35
3.4.1 Modele neliniare în raport cu variabilele dar liniare în raport cu parametrii 35
3.4.2 Modele neliniare, neabordabile prin MCMMP 36
3.5 Variabile calitative în economie 38
3.5.1 Variabilele dichotomice 39
Capitolul 4 44
Verificarea semnificației statistice a rezultatelor estimării. Testul t, testul F 44
4.1 Necesitatea etapei verificării 44
4.2 Verificarea semnificației statistice a fiecărui parametru estimat; testul t 46
4.2.1 Principalele noțiuni specifice 46
4.2.2 Testul t 48

4.2.3 Etapele verificării 49
4.3 Verificarea semnificației rolului ansamblului factorilor asupra variabilei efect 51
4.3.1 Testul F 51
4.3.2 Etapele aplicării testului F 52
4.3.3 Coeficientul de determinație 53
Capitolul 5 54
Verificarea confirmării ipotezelor 54
5.1 Ipoteze privind modelul şi metoda de estimare 54
5.2 Date suficiente, neafectate de erori sistematice 55
5.2.1 Considerații asupra necesității abordării problemei datelor 55
5.2.2 Verificarea şi aprecierea datelor numerice 55
5.3 Independența variabilelor factoriale din ecuația de regresie 56
5.3.1 Semnale care atrag atenția multicoliniarității: 57
5.3.2 Soluții 58
5.4 Ipoteza privind liniaritatea modelului şi corecta sa specificare 58
5.4.1 Verificarea prezumției liniarității 59
5.5 Verificarea confirmării ipotezelor privind comportamentul variabilei reziduale 60
5.5.1 Verificarea împrăştierii valorilor variabilei reziduale (homoscedasticitatea / heteroscedasticitatea 60
5.5.2 Testul GQ (Goldfeld, Quandt) 61
5.5.3 Prezumția neautocorelării valorilor reziduale 62
5.5.4 Variabila reziduală urmează o repartiție normală de medie zero 63
Capitolul 6 66
Aplicarea modelului de regresie în analiza şi prognoza economică 66
6.1 Coordonatele analizei economice şi analizei statistice 66
6.2 Prognoza economică bazată pe modelul de regresie 67
6.3 Modele econometrice utilizate în domeniul cererii de bunuri şi servicii 68
6.4 Producția, factorii determinanți şi funcțiile de producție 70
6.4.1 Ipoteze şi caracteristici în elaborarea şi utilizarea funcțiilor de producție în studiile economice 71
6.4.2 Indicatori utili analizei economice bazate pe funcții de producție 72
6.5 Relații financiar - bancare şi reprezentarea lor prin ecuații 75
6.5.1 Masa monetară şi factorii care determină cererea de bani 76
6.5.2 Rata dobânzii şi investițiile 76
6.5.3 Impozitele şi transferurile 77
6.5.4 Prețurile şi costurile 77
Capitolul 7 79
Evoluția proceselor economice în decursul timpului 79
7.1 Problema tendinței generale 79
7.2 Noțiuni specifice analizei seriilor cronologice 79
7.3 Modelul liniar unifactorial şi calculul tendinței generale 80

7.4 Clasificare a seriilor cronologice în raport cu existența sau inexistența tendinței generale 83
7.5 Dependețe în economie manifestate în mod sincron sau cu decalaje în timp 84
7.5.1 Seria integrată, serii cointegrate privind procese economice evolutive 84
7.6 Modele dinamice destinate includerii efectelor decalate în timp 86
7.6.1 Stabilirea unității de timp 87
7.6.2 Estimarea parametrilor 88
7.7 Autodeterminarea proceselor economice în timp; modelele stochastice de tip ARMA 90
7.7.1 Considerente economice şi statistice pe care se bazează modelul ARMA 90
7.7.2 Obținerea prognozelor 92
7.8 Fluctuații sistematice în economie – măsurare, analiză, prognoză 92
7.8.1 Depistarea grafică a variațiilor sezoniere 93
7.8.2 Ajustarea prin medii mobile 94
7.8.3 Indicii de sezonalitate 95
7.8.4 Coeficienții sezonieri 95
7.9 Elemente de analiză spectrală pentru studierea fluctuațiilor sistematice 100
Capitolul 8 103
Modelul econometric cu ecuații simultane 103
8.1 Formele de prezentare ale modelului cu ecuații simultane; modele clasice 104
8.2 Stabilirea variabilelor, funcțiilor şi identităților 110
8.3 Identificare, estimare şi verificare în cazul modelelor cu ecuații simultane 112
8.3.1 Verificarea modelului din perspectiva identificării fiecărei ecuații .. 112
8.3.2 Estimarea parametrilor 114
8.3.3 Etapa de verificare 118
8.4 Analiză, simulare şi prognoză 120
8.5 Modele macroeconometrice 124
Bibliografie 126
Anexe 127
Distribuția normală redusă (standard) 127
Distribuția t Student în funcție de probabilitatea P şi de numărul gradelor de libertate 128
Valori critice pentru repartiția F 129
Distribuția χ^2 129

Capitolul 1

Introducere în modelarea econometrică

Modelele econometrice analizează calitatea şi cantitatea proceselor economice şi evoluția lor.

Econometria prin caracterul său general creează modele abstracte ale fenomenelor economice.

Econometria este disciplina care s-a conturat ca o sinteză între analiza matematică, statistica matematică şi economie.

1.1 Ce este econometria?

Termenul econometrie a fost introdus în anul 1926 de către economistul şi statisticianul norvegian R. Frisch prin analogie cu termenul „biometrie" utilizat de Galton şi Pearson. Aşa cum "biometrie" desemna cercetările biologice cu ajutorul statisticii şi matematicii, econometria avea să însemne studiul economiei cu ajutorul acestor ştiințe fundamentale.

Econometria este o disciplină care s-a conturat ca o sinteză între economie, matematică şi statistică.

Din economie provin teoriile economice, din matematică modelele teoretice care exprimă teoriile economice, iar din statistică datele empirice şi metodele de prelucrare a acestora.

Pe baza datelor din economie, econometria construieşte modele (expresii cantitative) pentru realitățile economice studiate care au un corespondent în teoriile economice.

Prin procedeele de inferență statistică, econometria estimează parametrii modelelor şi realizează predicții asupra realității studiate.

Obiect: Aria de studiu a econometriei este realitatea economică privită ca un ansamblu de relații şi intercondiționări. Econometria studiază legăturile dintre fenomenele economice, dintre diferitele componente ale economiei în ansamblul său.

Metodă: Econometria studiază realitățile economice sub aspect cantitativ, utilizând metoda statisticii. Econometria contribuie la

cunoaşterea realității economice prin modul său specific de a surprinde cantitativ relațiile din viața economică reală cu ajutorul unui instrument specific: modelul econometric.

Scop: Scopul principal al econometriei este identificarea, estimarea şi testarea modelelor prin care se surprind relațiile dintre fenomenele economice reale.

1.2 Ce poate şi ce nu poate realiza econometria

Metodele de prelucrare a datelor urmăresc îndeosebi măsurarea, cuantificarea unor relații dintre procesele economice, având în vedere mai ales relațiile de tip cauză-efect.

Rolul econometriei rezultă din soluționarea unor obiective precum:

- Evidențierea, pe baze mai obiective, a relațiilor de cauzalitate din economie;
- Exprimarea numerică a efectului datorat creşterii cu o unitate a factorului;
- Stabilirea proporției în care unul sau mai mulți factori determină evoluția unei variabile-efect, precum şi ordonarea factorilor după importanță;
- Previziunea unui fenomen economic în raport cu factorii determinanți sau ținând cont de comportamentul fenomenului în perioadele anterioare;
- Aprecierea prin expresii numerice a implicațiilor pe care o acțiune de politică economică o are asupra mai multor sectoare economice;
- Stabilirea intensității şi direcției fluctuațiilor din economie;
- Aprecierea elementelor semnificative din economie de elementele nesemnificative (datorate hazardului).

Aspecte pe care econometria nu le poate rezolva sau încă nu le poate rezolva satisfăcător sunt următoarele:

- Încorsetarea într-un model generalizator, de mare amploare, a tuturor relațiilor existente în economie;

- Introducerea în calcule a variabilelor calitative cu o suficient de mare acuratețe, astfel încât rolul acestora sau amploarea modificării lor să poată fi măsurate cu suficient de mare precizie;
- Departajarea suficient de precisă a rolului fiecărui factor asupra unui proces economic, în situațiile în care factorii evoluează foarte asemănător (prezintă un grad înalt de coliniaritate);
- Prognoza suficient de precisă în situații conjuncturale diferite sau în situații în care interacțiunea factorilor reprezintă ea însăşi un factor;
- Econometria nu îşi propune stabilirea de valori numerice privind indicatorii economici (agregate de tip PIB, Venit național, etc.), unele stări de lucruri din economie (concentrarea, corelația, proporția unor realizări) şi nici obținerea de soluții optime (stocul optim, ruta optimă în transporturi) sau soluții care nu aparțin domeniului relațiilor de cauzalitate, manifestate la un moment dat sau în decursul timpului.

1.3 Repere istorice

Econometria este o disciplină ştiințifică relativ nouă**,** dezvoltată începând cu mijlocul secolului trecut. Totuşi, primele încercări de a cuantifica şi exprima cantitativ relațiile dintre fenomenele reale sunt mult mai vechi şi datează din secolul al XVII-lea.

Şcoala Aritmeticii politice engleze: Un studiu asupra genezei econometriei ne-ar conduce la începuturile secolului al XVII-lea când englezul W. Petty pune bazele "aritmeticii politice" prin care se foloseau sistematic fapte şi cifre în elaborarea unor studii legate de populație, finanțe, comerț exterior sau impozitare.

Laboratoarele biometrice engleze: La sfârşitul secolului al XIX-lea şi începutul secolului al XX-lea, în Anglia se desfăşura o activitate ştiințifică remarcabilă de cercetare a legilor naturii şi a geneticii umane. Printre figurile ilustre ale acestei şcoli se numără F. Gallun, K. Pearson**,** R.A. Fisher, F.Y. Edgeworth, ale căror lucrări fundamentale au contribuit la dezvoltarea metodelor de analiză a legăturilor dintre variabile.

Societatea de econometrie: La 29 decembrie 1930, la Cleveland (S.U.A.) a fost întemeiată "Societatea de Econometrie", instituție care a creat şi promovat termenul de "econometrie"**.**

Dintre membrii societății, menționăm cele mai importante figuri: Irving Fisher, R. A. Fisher (matematician şi biolog, care a dezvoltat analiza dispersională), Jan Timbergen (fizician olandez), T. Haavelmo, R. Frisch (primul preşedinte al societății) ş.a.

Mari gânditori ai secolului XX: Econometria se dezvoltă prin contribuția unor cercetători importanți, din diferite direcții ale cercetării:
producție: Cobb C.W. şi Douglas P.H.;
cererea de consum: K. Schultz, P.A. Samuelson;
teoriile economice şi construirea modelelor: J. Timbergen, T. Haavelmo, R. Frisch, L.R. Klein, H.Theil;
studiul riscului şi incertitudinii în economie, modele macroeconomice: J.M. Keynes.

1.4 Concepte

În cercetarea econometrică se utilizează o serie de concepte, noțiuni şi termeni specifici: model, variabile, parametri, estimator, estimații, ca şi termeni statistici.

Modelul econometric: Modelul este o schemă simplificată a realității care are rolul de a explica realitatea studiată în dimensiunile ei fundamentale, esențiale. Modelul econometric este o prezentare formalizată a problemei sau a realității economice studiate. De regulă, modelul econometric este o ecuație sau un sistem de ecuații construit pe baza variabilelor statistice.

Exemple
Relație dintre vânzări şi preț:
Vânzări = a + b Preț + u
Evoluția producției în raport cu factorii determinanți:
Producție = $a \cdot$ Capital $\cdot$ Munca

Variabile: În cercetarea econometrică se utilizează variabile statistice între care există relații de interdependență.

Variabilă = însuşire, element caracteristic care poate înregistra diverse niveluri exprimate, de regulă, numeric.

Exemple: prețul produsului, rata dobânzii, cantitatea produsă, valoarea tranzacțiilor la bursă. Variabile de tip calitativ (nenumerice): culoarea, religia, anotimpul.

Variabila aleatoare prezintă drept element caracteristic faptul că poate înregistra orice valoare într-un ansamblu de valori specificat corespunzător unei repartiții de probabilitate.

Exemple: cursul de schimb, vânzările pe o piață liberă, abaterea (eroarea) dintre nivelul preconizat şi cel realizat.

Tipuri de variabile:

- *variabilă endogenă*, numită şi variabilă dependentă, rezultativă sau efect, rezultat. Este variabila pentru care modelul, în urma estimării, poate genera valori. Variabila endogenă este poziționată în stânga semnului egalității în ecuația în care ea reprezintă obiectivul, dar poate să apară şi în postura de factor în alte ecuații. Se notează de regulă cu *y*.
- *variabila exogenă*, numită şi variabilă independentă, factorială, factor de influență sau regresor, care determină un anumit efect asupra variabilei rezultat. Este variabila aflată în postura de cauză a evoluției variabilei endogene, având valori preluate din statistici. Locul variabilei exogene este în dreapta semnului egalității şi este, de regulă, notată cu *x*.

Alături de aceste două categorii de variabile, în econometrie se utilizează o categorie specială: *variabilele reziduale* sau eroare.

De regulă, aceste variabile apar în model ca sumă a tuturor influențelor necunoscute sau care nu apar explicit în model. În cercetarea econometrică, variabila eroare este o variabilă aleatoare care respectă anumite proprietăți numite şi ipoteze clasice.

Variabila reziduală se obține în urma calculului abaterilor dintre valorile empirice ale variabilei endogene (*y*) şi valorile generate de model ale aceleiaşi variabile ($\hat{y}$). Locul variabilei rest este, de regulă, în partea finală a ecuației şi este notată cu *u*, dar se mai foloseşte şi *v* sau *e*. Este denumită *perturbație* sau *eroare*.

Medie = nivel central obținut în urma unui calcul privind un ansamblu de valori ale variabilei analizate. Se utilizează media aritmetică:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i f_i}{\sum_i f_i}$$

unde x_i reprezintă valorile variabilei, iar f_i frecvența de apariție.

Media variabilei aleatoare (speranța matematică, aşteptarea) rezultă ca o sumă a valorilor variabilei aleatoare ponderate cu probabilitățile asociate posibilelor valori:

$$M(x) = \sum_i x_i P_i$$

cu $\sum_i P_i = 1$

Dispersie = indicator sintetic destinat măsurării împrăştierii valorilor variabilei de la medie. Dispersia este notată σ^2 , dar şi "var" sau s^2 (numită şi varianță).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_i f_i}$$

Dispersia variabilei aleatoare *x*:

$$\sigma^2(x) = M\left[x - M(x)\right]^2$$

Abaterea medie pătratică:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Covarianța (cov) variabilelor x_1, x_2 reprezintă un indicator de măsurare a variabilității conjugate privind două variabile aflate într-o relație de dependență:

$$Cov(x_1, x_2) = M\left[(x_1 - M(x_1))(x_2 - M(x_2))\right]$$

Coeficientul de corelație (*r*) reprezintă un indicator de măsurare pe o scară numerică cuprinsă între – 1 şi + 1 a legăturii (dependenței, analogiei) dintre două variabile. În varianta Pearson, coeficientul de corelație este definit astfel:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}$$

Eşantion = subansamblu de elemente (unități, cazuri) extrase (la întâmplare) dintr-un ansamblu (populație). Deseori o secvență de valori ale unei variabile urmărite (înregistrate) în decursul timpului este asimilată cu eşantionul. Se notează cu *n* numărul de unități din eşantion.

Estimare = calcul sau suită de calcule (algoritm) destinate obținerii unei mărimi numerice (coeficient, parametru) pe baza datelor unui eşantion. Se notează estimațiile cu $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\alpha}, \hat{r}.$

Estimarea parametrilor unei funcții se situează în centrul atenției econometricienilor.

Test = verificare a unei prezumții (ipoteza nulă H_0, a negării existenței unei calități a estimației), în condițiile existenței unei repartiții proprii estimației analizate. În urma testării, ipoteza nulă poate fi acceptată sau poate fi infirmată (respinsă) în favoarea ipotezei alternative H_1. frecvent utilizate în econometrie sunt testele: *t* – Student, *F* – Snedecor, χ^2 (hi-pătrat).

Parametru: Parametrii modelului econometric, numiți şi coeficienți de regresie, sunt mărimi reale şi necunoscute care apar în model în diferite expresii alături de variabile.

Parametrii fac obiectul procesului de estimare şi testare statistică. Parametrul este o mărime considerată constantă, rezultată în urma unui calcul bazat pe datele presupuse de variabilele ecuației / ecuațiilor modelului. De regulă, se au în vedere estimații ale parametrilor, motiv pentru care se ataşează literei un accent circumflex.

Locul parametrului în model este alături de variabila factorială la care se referă (excepție face parametrul liber). Se notează cu *a*, *b*, a_0, a_1, α, β. Este denumit şi *coeficient* sau *estimație*.

Estimatori: Estimatorii sunt variabile aleatoare, convenabil construite în procesul de estimare, cu distribuții de probabilitate cunoscute şi cu proprietăți specifice în baza cărora se realizează procesul de estimare a parametrilor modelului econometric.

Notăm parametrul cu simbolul θ şi un estimator al acestuia cu $\hat{\theta}$ În procesul de estimare, cele mai importante proprietăți ale estimatorilor sunt:

- *nedeplasarea* - un estimator este nedeplasat dacă media sau speranța matematică a acestuia este egală cu parametrul.

Un estimator nedeplasat verifică relația: $M(\hat{\theta}) = \theta$. Dacă relația nu este respectată, atunci estimatorul este deplasat.

- *convergența* - un estimator este convergent dacă pentru un eşantion cu volum suficient de mare şirul estimatorilor converge către parametru. Pentru un estimator convergent are loc relația:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon \in (0,1).$$

- *eficiența* – estimatorul $\hat{\theta}$ este eficient dacă are dispersia sau varianța cea mai mică dintre toți estimatorii posibili pentru parametrul θ.

Autocorelație, autoregresie = noțiuni care se referă la dependența dintre termenii poziționați la o anumită distanță de timp. Aşadar, este presupusă dependența modificărilor variabilei în raport cu propriile modificări realizate într-un trecut mai mult sau mai puțin apropiat.

Autocorelația implică determinarea intensității corelației dintre termenul înregistrat în perioada t şi termenul din perioada $t - 1$ (coeficientul r_1), respectiv din perioada $t - 2$ (coeficientul r_2), etc.

Autoregresia presupune analiza gradului de dependență dintre seria de date y_t şi aceeaşi serie decalată cu 1:

$y_t = a + by_{t-1} + u_t$, unde $t = 2, 3, ...,n$

Pot fi considerate variabile explicative seriile decalate, în succesiune cu 1,2,...,k perioade de timp:

$y_t = a + b_1y_{t-1} + ... + b_ky_{t-k} + u_t$

1.5 Demers metodologic

Modelarea econometrică se poate rezuma sintetic la parcurgerea următoarelor etape:

- formularea problemei în termeni economici, pornind de la o teorie sau o problemă economică;
- identificarea variabilelor care instrumentează problema;
- identificarea tipului şi formei legăturii dintre variabile, după o analiză atentă a fenomenului real şi a teoriei economice;
- propunerea unuia sau a mai multor modele care explică realitatea studiată prin relații de dependență între variabile;
- estimarea parametrilor modelului sau modelelor propuse, pe baza metodelor statistice cunoscute;
- testarea modelului sau modelelor şi alegerea celui mai bun model;
- aplicarea în practică sau realizarea de predicții pe seama modelului.

Notații

- y- variabila dependentă;
- x_i - variabilele independente, $i = 1, 2, ..., k$, unde k este numărul de factori;
- u - variabila reziduală sau eroare;
- $y = f(x_i) + u$ - modelul econometric;
- a_i, b_i - parametrii modelului, $i = 1, 2, ..., k$;
- n - volumul eşantionului.

Capitolul 2.

Modelul unifactorial

2.1 Relațiile de cauzalitate în economie

Situațiile în care un proces economic depinde de un singur factor nu sunt prea frecvente în economie.

Se va aborda dependența începând cu un singur factor, de la unifactorial la multifactorial, de la particular la general, de la relația liniară la alte tipuri de dependențe.

Exemple de relații din economie care implică un efect şi un factor important într-o dependență liniară:

- Cererea de alimente strict necesare depinde de numărul populației;
- Producția depinde de numărul de ore utilizate efectiv pentru realizarea ei;
- Rata dobânzii la băncile comerciale este influențată de rata dobânzii de referință;
- Exportul unui produs depinde de nivelul prețului; etc.

În majoritatea cazurilor:

- Dependența nu este totală, (o anumită variabilă depinde sau este influențată îndeosebi de...), aspect care implică recunoaşterea existenței şi a altor cauze de o mai mică importanță sau prea puțin cunoscute;
- Deseori este specificată existența unor condiții care se mențin aceleaşi, ceea ce poate fi valabil în condiții de laborator, dar numai temporar poate fi constatat în viața reală pe un segment de cazuri.
- Dependența unui proces în raport cu factorul determinant se poate manifesta diferit în decursul timpului, în raport cu gradul de stabilitate al celorlalți factori importanți.
- La aceasta se adaugă influența elementului perturbator provocat de cauze minore, puțin cunoscute, mai mult sau mai puțin accidentale.

2.2 Modelul liniar simplu

Modelul liniar simplu presupune că între cele două variabile există o dependență după modelul unei ecuații de gradul întâi sau că între variabile există o relație de proporționalitate.

2.2.1 Prezentarea problemei. Exemple din economie

Modelul liniar simplu este cel mai simplu model econometric sau cea mai simplă schemă explicativă a dependenței dintre două variabile.

În economie există situații în care un rezultat sau un fenomen poate fi explicat într-o proporție ridicată doar de influența unui singur factor. Acest factor apare în modelul econometric drept variabilă independentă, iar restul influențelor este preluat de variabila reziduală.

Exemple din economie de modele liniare simple

1) ***Funcția de consum*** - cererea sau consumul populației pentru o anumită categorie de mărfuri este o funcție de venit

$$C_i = a + b\,V_i + u_i,$$

unde parametrul b arată de câte ori creşte consumul unui anumit produs (C_i) la o creştere cu o unitate a venitului şi este de regulă pozitiv.

2) ***Legea cererii*** - cererea populației pentru o anumită categorie de mărfuri este în funcție de prețul acestor produse

$$C_i = a + b\,P_i + u_i,$$

unde parametrul b este de regulă negativ şi arată cu cât scade cererea la o creştere a prețului cu o unitate.

2.2.2 Model şi ipoteze

Modelul prin care se exprimă dependența în raport cu un singur factor trebuie să conțină:

- Variabila efect, notată cu y_i;

- Variabila cauzală considerată determinantă pentru procesul analizat, notată cu x_i;
- Variabila care poate perturba relația dintre principalele variabile, expresie a acțiunii cauzelor minore, numită abatere sau eroare şi notată cu u_i.

Modelul de regresie liniară simplă exprimă legătura liniară dintre variabile, de forma:

$$y_i = a + b\,x_i + u_i$$

Relația de mai sus se numeşte ecuație de regresie şi reprezintă funcția liniară

$y_x = a + bx$ plus eroarea *u.*

Parametrii (constantele, coeficienții) notați *a*, *b* urmează să fie *determinați* corespunzător datelor numerice ce privesc *ansamblul* (*N*) de cazuri sau urmează să fie *estimați* dacă datele se referă la un *eşantion* (*n*) de cazuri.

a reprezintă ordonata la origine, care arată valoarea lui *y* când $x = 0$;
b reprezintă panta dreptei, numit şi coeficient de regresie.

Parametrul de regresie *b* arată gradul de dependență dintre variabile, respectiv cu cât creşte sau scade *y* la o creştere a variabilei *x* cu o unitate.

Variabilele din ecuație sunt:
- *y - variabila dependentă, aleatoare;*
- *x- variabila independentă, nonaleatoare;*
- *u - variabila aleatoare eroare sau reziduu.*

Ipotezele modelului de regresie vizează variabila reziduală şi variabila independentă. Cele mai importante ipoteze sunt:
- normalitatea erorilor : $u_i \approx N\left(0,\sigma^2\right)$, adică variabila reziduală urmează o lege de repartiție normală de medie zero şi varianță σ^2;
- homoscedasticitate:

  $var(u_i) = \sigma^2$,

  adică dispersia (varianța) erorii este constantă.
- necorelarea erorilor: $cov(u_i, u_j) = 0$, adică erorile nu se influențează reciproc;

• lipsa corelației dintre variabila independentă şi variabila eroare: cov(x_i, u_i) = 0.

2.3 Estimarea parametrilor modelului

În practică, determinarea parametrilor la nivelul populației totale nu este posibil de realizat, fapt care impune estimarea parametrilor.

Folosind date înregistrate asupra unui eşantion de *n* perechi de observații asupra variabilelor x şi y, se calculează estimațiile $\hat{a}$ şi $\hat{b}$ ale parametrilor a şi b .

Pentru diverse eşantioane de volum *n* se obțin diverse estimații pentru parametrii modelului de regresie liniară.

Mulțimea acestora descrie aşa-numiții estimatori ai parametrilor *a, b*.

Estimatorii sunt variabile aleatoare a căror distribuție se poate descrie în anumite ipoteze impuse modelului.

Exemplu

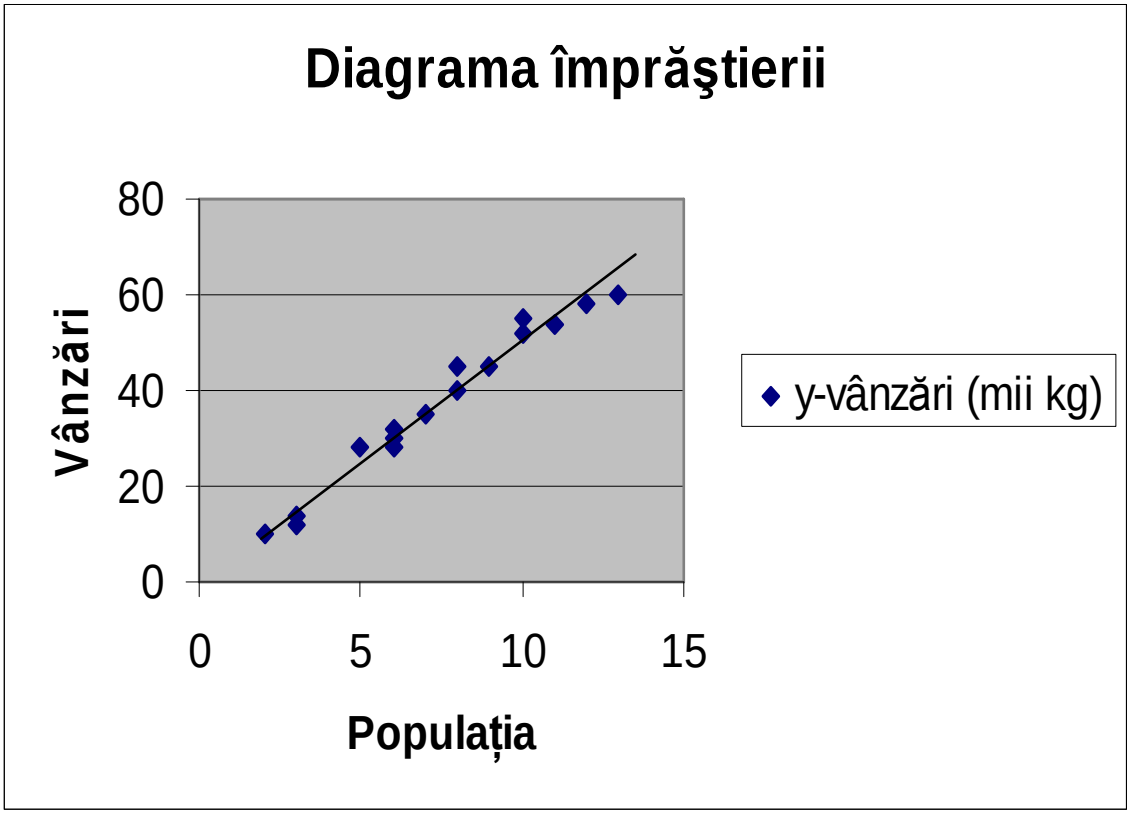
Se caută să se verifice în ce măsură numărul populației *x* determină vânzările unui produs de uz curent *y*. Datele culese din 16 localități sunt următoarele:

x-populația (zeci de mii loc.)	2	3	3	5	6	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12	13
y-vânzări (mii kg)	10	12	14	28	30	32	28	35	40	45	45	52	55	54	58	60

Reprezentarea într-un sistem de axe a punctelor de coordonate x_i, y_i descrie un nor de puncte a cărui formă urmează mai curând o dreaptă decât o linie curbă.

Acest fapt ne îndreptățeşte să acceptăm drept model a relației de dependență funcția

$$\hat{y} = a + bx$$



De la fiecare punct (x_i, y_i) până la dreaptă se constată existența unor distanțe mai mari sau mai mici, reprezentând abateri generate de acei factori considerați nesemnificativi, accidentali, având un rol perturbator.

Se notează distanța de a fiecare punct (x_i, y_i) până la punctul corespunzător de pe dreaptă $(x_i, \hat{y}_i)$ cu u_i. Atunci mărimea abaterii este diferența: $u_i = y_i - \hat{y}_i$

În continuare se caută obținerea de soluții pentru parametrii *a* şi *b*, deschizând perspectiva analizei statistice, analizei economice, prognozei vânzărilor.

Pentru realizarea acestor obiective se urmăreşte obținerea unor estimări (pentru că se dispune doar de secvențe / eşantioane de date) care să conducă la:

- Obținerea unui grad de determinare (a efectului de către cauză) cât mai mare;
- Abaterile dintre valorile empirice ale variabilei efect *y* şi valorile aceleiaşi variabile obținute pe baza modelului şi poziționate pe dreaptă (, valori ajustate, teoretice), să fie cât mai mici;
- Estimațiile obținute pentru parametri să fie cât mai precise, să tindă spre adevăratele valori ale parametrilor pe măsură ce eşantionul creşte.

Metode de estimare care îndeplinesc condițiile enumerate sunt:

- Metoda celor mai mici pătrate (MCMMP);
- Metoda verosimilității maxime (MVM);
- Metoda bayesiană.

Metoda celor mai mici pătrate implică cele mai mici costuri pentru aplicarea ei.

2.4 Noțiuni privind datele şi soluțiile

Se numesc valori / niveluri **empirice** ale variabilelor *y* sau *x* acele mărimi numerice obținute din statistici. Se notează cu x_i, y_i, iar pe grafic apar sub formă de puncte de coordonate (x_i, y_i).

Se numesc valori / niveluri **ajustate** sau teoretice, acele valori care urmează să fie generate de model, notate .Ele se obțin după estimarea parametrilor.

Se numesc valori **adevărate** ale parametrilor acele soluții la care s-ar ajunge dacă s-ar cunoaşte toate valorile pe care le iau *x, y*. Aceste valori se notează cu *a* şi *b*, iar numărul total de cazuri cu *N*.

Se numesc valori **estimate** ale parametrilor acele soluții care rezultă în urma utilizării datelor pe care variabilele x_i, y_i le-au înregistrat într-un eşantion. Aceste soluții se notează cu $\hat{a}, \hat{b}$, iar numărul de cazuri incluse în eşantion cu *n*.

În marea majoritate a cazurilor se lucrează cu eşantioane, astfel încât se obțin, frecvent, estimații.

Doar în sfera teoriei ne referim la valori adevărate ale parametrilor.

2.5 Metoda celor mai mici pătrate

Metoda celor mai mici pătrate consideră abaterea următoare drept element cheie: $u_i = y_i - \tilde{y}_i$

Ridicarea la pătrat şi însumarea pătratelor abaterilor conduce la calculul sumei:

$$S = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2$$

Condiția este ca estimațiile să fie astfel alese încât această sumă să fie minimă.

Întrucât $\tilde{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ se rescrie expresia astfel:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(\hat{a} + \hat{b}x_i \right) \right]^2$$

Punctul de extrem se obține prin egalarea cu zero a derivatelor parțiale în raport cu necunoscutele $\hat{a}$ și $\hat{b}$.

Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S\left(\hat{a},\hat{b}\right)}{\partial \hat{a}} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i \right) \cdot (-1) = 0 \\ \dfrac{\partial S\left(\hat{a},\hat{b}\right)}{\partial \hat{b}} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i \right) \cdot \left(-x_i \right) = 0 \end{cases}$$

Ceea ce devine:

$$\begin{cases} n\hat{a} + \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{a}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Se notează:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Se obține soluția:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum \left(y_i - \bar{y} \right)\left(x_i - \bar{x} \right)}{\sum \left(x_i - \bar{x} \right)^2}$$

2.5.1 Interpretarea parametrilor estimați

$\hat{b}$ indică cu câte unități naturale (în care este exprimat *y*) se modifică variabila – efect (crește pentru $\hat{b} > 0$, scade pentru $\hat{b} < 0$) dacă factorul *x* crește cu 1 (adică cu o unitate naturală în care este exprimat *x*). $\hat{b}$ indică panta dreptei de regresie (slope).

$\hat{a}$ nu are interpretare economică ci doar semnificația sa de ordonată la origine (intercept).

Exemplu

x	y	y-M(y)	x-M(x)	(y-M(y))(x-M(x))	$(x-M(x))^2$
2	10	-27.375	-5.4375	148.8515625	29.566406
3	12	-25.375	-4.4375	112.6015625	19.691406
3	14	-23.375	-4.4375	103.7265625	19.691406
5	28	-9.375	-2.4375	22.8515625	5.9414063
6	30	-7.375	-1.4375	10.6015625	2.0664063
6	32	-5.375	-1.4375	7.7265625	2.0664063
6	28	-9.375	-1.4375	13.4765625	2.0664063
7	35	-2.375	-0.4375	1.0390625	0.1914063
8	40	2.625	0.5625	1.4765625	0.3164063
8	45	7.625	0.5625	4.2890625	0.3164063
9	45	7.625	1.5625	11.9140625	2.4414063
10	52	14.625	2.5625	37.4765625	6.5664063
10	55	17.625	2.5625	45.1640625	6.5664063
11	54	16.625	3.5625	59.2265625	12.691406
12	58	20.625	4.5625	94.1015625	20.816406
13	60	22.625	5.5625	125.8515625	30.941406
7.438	37.375			800.375	161.9375
		b=	4.942493	a=	0.6152065

2.5.2 Analiza de regresie şi modalitatea de estimare a parametrilor

În procesele economice se observă că pentru un nivel oarecare al factorului se constată o diversitate de valori privind efectul declanşat.

Acest aspect poate fi constatat fie pentru mai multe cazuri în care factorul, deşi constant ca nivel, generează efecte diferite, fie în situațiile în care se analizează mai multe eşantioane, iar un nivel identic al factorului de la un eşantion la altul generează efecte diferite.

Relația dintre cauză şi efect nu este de tip determinist.

Pe lângă factorul cu rol determinant există şi un element aleator care perturbă relația dintre cauză şi efect.

Relația de dependență este dată de funcția stochastică (stochastic = aleator, întâmplător):

$$y = a + bx + u$$

În situația în care datele se referă la întreaga populație se obține o funcție de regresie a populației (FRP):

$$y = a + bx + u$$

unde coeficienții *a, b* reprezintă valorile adevărate ale parametrilor.

În practică rareori se apelează la toate cazurile care formează populația, întrucât această variantă de lucru implică eforturi deosebite.

Este de preferat utilizarea datelor unui eşantion:

- În optica transversală: 35 firme sau 60 familii sau 80 clienți bancari;
- În optica temporală: 20 trimestre în care s-au realizat importuri; 18 ani în care s-a înregistrat evoluția producției; 16 luni în care se cunoaşte rata dobânzii; etc.

Pe baza datelor unui eşantion se pot obține doar estimări ale parametrilor care apar în funcția stochastică a eşantionului (FSE):

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i$$

Obținerea valorilor estimate pentru constantele funcției stochastice deschide perspective cum ar fi:

• Cuantificarea rolului variabilei factoriale (*x*) asupra variabilei efect, exprimată de nivelul $\hat{b}$;

• Obținerea de valori ajustate ale nivelurilor variabilei efect adică valori y_i datorate exclusiv influenței factorului determinant;

• Calculul abaterilor $u_i = y_i - \hat{y}_i$ este util, analiza acestei serii de valori reziduale conduce la aprecieri privind calitatea modelului;

• Determinarea unor previziuni privind evoluția variabilei efect în condițiile în care nivelul viitor al factorului este previzibil şi nu se întrevăd schimbări majore în relația dintre *x* şi *y*.

Astfel de perspective sunt de interes pentru analiza şi prognoza în economie.

Ele justifică importanța atribuită estimării în econometrie, dar şi interesului acordat verificării modului în care au fost obținute estimările, calitățile acestora şi, în general, aprecierea performanțelor modelului.

2.6 Alte metode de estimare

Între metodele de estimare, MCMMP se particularizează prin: frecvența utilizării, existența unui număr relativ mare de variante, atracția pe care o exercită asupra economiştilor. Există şi alte metode, ca de exemplu: metoda verosimilității maxime, metoda bayesiană, metoda punctelor perechi.

Metoda verosimilității maxime

Metoda verosimilității maxime este recunoscută ca un procedeu de estimare dintre cele mai performante. MVM urmăreşte obținerea unor astfel de estimații pentru parametri încât probabilitatea reproducerii valorilor (datelor) eşantionului, folosind estimațiile, să fie maximă.

Se urmăreşte obținerea acelor soluții (pentru parametri) pentru care funcția de verosimilitate corespunzătoare, rezultată din repetate sondaje, atinge valoarea sa maximă. Funcția de verosimilitate se referă la probabilitatea simultană de realizare a valorilor y_i privite ca funcție de unul sau mai mulți parametri. În cazul modelului unifactorial, probabilitatea simultană reprezentată de densitatea de repartiție a valorilor $y_1, y_2, ..., y_n$ date fiind constantele a, b, σ^2, este reprezentată de:

$$f\left(y_1, y_2, ..., y_n / a, b, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i\right)$$

întrucât independența evenimentelor implică produsul probabilităților. Dacă se are în vedere repartiția normală a valorilor y_{ij} în cazul fiecărui x_i, (se lucrează pe mai multe eşantioane) de medie $M(y/x) = a + bx$ şi de dispersie independentă de x, atunci densitatea de repartiție a valorilor y_i este reprezentată de **funcția de verosimilitate**:

$$L = f\left(y_1, y_2, ..., y_n / a, b, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i\right) = \left(\sigma^2 \cdot 2\pi\right)^{-\frac{1}{2}n} e^{-\frac{\sum [y_i - (a+bx)]^2}{2\sigma^2}}$$

În continuare, se urmăreşte estimarea valorilor a, b, σ^2 care conduce la maximizarea probabilității de reproducere a datelor eşantionului ($y_1, y_2, ..., y_n$).

Aceasta presupune maximizarea funcției de verosimilitate. Se pune deci problema găsirii unui extrem al unei funcții, ceea ce se rezolvă prin egalarea cu zero a derivatelor parțiale în raport cu fiecare dintre cele trei necunoscute. În acest scop, se preferă reprezentarea în formă logaritmată:

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\cdot\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum\left[y-\left(a+bx\right)\right]^2$$

Ecuațiile la care se ajunge prin egalarea cu zero a derivatelor parțiale sunt următoarele:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sigma^2}\sum\left(y-a-bx\right)\left(-1\right) = 0 \Rightarrow na + b\sum x = \sum y$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sigma^2}\sum\left(y-a-bx\right)\left(-x\right) = 0 \Rightarrow a\sum x + b\sum x^2 = \sum xy$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum\left[y-\left(a+bx\right)\right]^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum u^2$$

Pentru *a* şi *b* ecuațiile sunt identice cu cele rezultate în cazul MCMMP. Se mai adaugă relația de estimare a necunoscutei σ^2.

Metoda bayesiană de estimare

Metoda bazată pe analiza bayesiană are în vedere atât datele eşantionului (privind y_i, x_i) cât şi informațiile apriori cunoscute privind parametrii (din teoria economică sau cercetări anterioare). La acestea se adaugă, învederea estimării, şi o funcție a pierderii (costului, riscului) datorată abaterilor valorilor estimate de la cele adevărate.

Estimațiile punctiforme rezultă prin introducerea în calcule a ambelor categorii de informații:

- informații apriorice care conduc la probabilități apriorice, $P(b/I_0)$;
- informații bazate pesondaj, cărora le este specifică o funcție de verosimilitate $P(y/b)$.

Ambele tipuri de informații conduc la obținerea aşa-numitelor probabilități revizuite $P(b/y,I_0)$.

Regula lui Bayes face posibilă obținerea funcției densității de repartiție revizuită:

$$P(b/y, I_0) = \frac{P(y/b) \cdot P(b)}{P(y)}.$$

Introducerea în calcul a funcției pierderi $L = L(\hat{b}, b)$ este motivată de considerentul că abaterea estimației de la valoarea adevărată provoacă o pierdere (un cost, un risc) proporțională cu mărimea abaterii (în valoare absolută).

Metoda punctelor pereche

În vederea estimării parametrilor funcției liniare sunt strict necesare două perechi de valori $y_i x_i$ (existând 2 parametri) alese în zone distincte şi, pe cât posibil, neafectate de abateri accidentale semnificative.

În cazul în care funcția este neliniară, se alege un număr de perechi de valori egal cu numărul necunoscutelor (parametrilor). Pentru o cât mai bună aproximare a constantelor modelului se recomandă extrageri de perechi de valori din zone caracteristice relației dintre variabile. Astfel, pentru cazul liniar se recomandă perechile de la începutul, respectiv sfârşitul seriei de date; pentru polinomul de gradul II:

$y = a + bx + cx^2 + u$

se aleg perechi de valori $y_i x_i$ aflate la începutul seriei, la mijlocul acesteia şi în zona finală. Sistemul de ecuații la care se ajunge permite obținerea soluțiilor.

Capitolul 3

Modelul multifactorial

O apropiere a modelului econometric de diversitatea şi complexitatea proceselor economice presupune analiza relației dintre variabila efect şi un ansamblu de factori determinanți, precum şi includerea unor relații de tip neliniar.

3.1 Cazul liniar multifactorial

În practică sunt puține fenomene economice care depind în mod semnificativ de un singur factor.

Situația mult mai frecventă este aceea în care nivelul fenomenului economic este rezultanta mai multor factori importanți la care se adaugă şi rolul unor factori mai puțin cunoscuți, presupuşi a fi nesemnificativi.

Este necesară includerea în mod explicit a factorilor cu influență determinantă, astfel încât să se reducă perturbația.

Exemple

- Producția industrială este influențată de cantitatea şi calitatea fondurilor fixe, ca şi de numărul salariaților;
- Producția vegetală din agricultură depinde de cantitatea de îngrăşăminte, umiditatea solului, utilajele folosite, calitatea lucrărilor;
- Volumul investițiilor depinde de cuantumul economiilor, rata dobânzii, investițiile începute;
- Cererea de mărfuri este funcție de ofertă, venituri, publicitate, prețuri.

Atât în teoria economică, cât şi în practică se găsesc astfel de factori determinanți, inclusiv direcția în care fiecare dintre ei influențează variabila-efect.

Ceea ce nu se cunoaşte este măsura în care fiecare factor influențează variabila-efect. În realizarea unei astfel de măsurători intervine econometria.

Relația este de tip multidimensional, în care apar *k* factori:

$$\tilde{y}_i = f\left(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ki}\right)$$

Funcția de regresie este de forma:

$$M\left(y_i / x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ki}\right) = f\left(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ki}\right)$$

unde $M\left(y_i / x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ki}\right)$ reprezintă media distribuției variabilei-efect condiționată de modificările de nivel constatate în ce priveşte factorii importanți luați în calcul.

În cazul în care relația dintre variabila-efect şi fiecare dintre cauze este de tip liniar se obține:

$$M\left(y_i / x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ki}\right) = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + ... + a_k x_{ki}$$

Forma stochastică a modelului de regresie include şi variabila reziduală *u* prin intermediul căreia sunt evidențiate influențele accidentale, minore ca importanță, întâmplătoare (aleatoare, stochastice) ca mod de comportare, dar care pot genera o abatere oarecare asupra variabilei-efect:

$$y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + ... + a_k x_{ki} + u_i$$

De remarcat faptul că atunci când se face referire la un caz aparte şi nu la medie, elementul perturbator *u* este luat în calcul, iar introducerea lui conferă modelului atributul de stochastic, apropiindu-l de modalitatea reală de desfăşurare a proceselor economice.

În cele ce urmează se abordează un caz multifactorial în care variabila-efect depinde de 2 factori, printr-o relație de tip liniar.

3.2 Etapele demersului:

- Elaborarea modelului;
- Estimarea parametrilor;
- Verificarea semnificației rezultatelor estimării;
- Utilizarea modelului în vederea analizei şi prognozei.

3.2.1 Specificarea

Se presupune că studiul se referă la analiza cererii de servicii de către populație în raport cu cauzele care determină o astfel de cerere.

Din sursele teoretice şi practice rezultă doi factori: veniturile disponibile ale populației şi oferta de servicii existentă pe piață.

Datele de care dispunem se referă la valori trimestriale privind:

- Ponderea cheltuielilor destinate serviciilor în bugetul familiei – reprezintă variabila-efect notată cu *y*;
- Venitul mediu ce revine pe membru de familie (în mii lei) – reprezintă primul factor, notat cu *v*;
- Investițiile în domeniul serviciilor destinate populației (în milioane lei) – reprezintă al doilea factor, notat cu *z*.

Datele pentru $n = 15$ trimestre succesive:

y %	10	11	12	14	15	16	16	17	16	18	18	18	19	19	21
v (mii lei)	1.5	1.5	2	2	2	2.2	2.5	2.4	2.4	3	3	3	3.2	3.3	3.5
z (mil. lei)	0.8	1	1.5	2	1.8	1.8	2	2.4	2.1	2.1	2.6	2.4	2.5	2.2	2.8

Se acceptă varianta liniară.

Specificarea modelului conduce la următoarea reprezentare:

$$y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 v_i + \hat{a}_2 z_i + u_i$$

unde $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ reprezintă estimații ale parametrilor întrucât se utilizează date pentru un eşantion.

Mențiuni:

1. Stabilirea factorilor şi a funcției reprezintă o bază de pornire, în sensul că opțiunile făcute în faza specificării urmează să fie verificate în etapele următoare (în etapa verificării şi a utilizării modelului).
2. Important în această etapă:

- Asigurarea unui număr suficient de mare de cazuri $n \geq 15$, superior numărului de parametri din model;
- Stabilirea factorilor cu rol realmente determinant şi independenți între ei;
- Eroarea de specificare ar putea consta fie în alegerea unui număr prea mic de cazuri, fie alegerea unui număr prea mare de factori, fie alegerea greşită a funcției.

3.2.2 Estimarea parametrilor

- Se caută soluții pentru necunoscute, adică obținerea de estimatori de calitate $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$
- Se utilizează metoda celor mai mici pătrate, adică suma pătratelor abaterilor să fie minimă:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 v_i + \hat{a}_2 z_i \right) \right]^2$$

- Se egalează cu 0 derivatele parțiale în raport cu fiecare necunoscută.
- Se obține punctul de minim al expresiei.

$$\frac{\partial \sum_i u_i^2}{\partial \hat{a}_0} = 0$$

$$2\sum_i \left(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 v_i - \hat{a}_2 z_i \right) \cdot (-1) = 0$$

$$\frac{\partial \sum_i u_i^2}{\partial \hat{a}_1} = 0$$

$$2\sum_i \left(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 v_i - \hat{a}_2 z_i \right) \cdot (-v_i) = 0$$

$$\frac{\partial \sum_i u_i^2}{\partial \hat{a}_2} = 0$$

$$2\sum_i \left(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 v_i - \hat{a}_2 z_i \right) \cdot (-z_i) = 0$$

Rezultă sistemul de ecuații normale:

$$n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_i v_i + \hat{a}_2 \sum_i z_i = \sum_i y_i$$

$$\hat{a}_0 \sum_i v_i + \hat{a}_1 \sum_i v_i^2 + \hat{a}_2 \sum_i v_i z_i = \sum_i v_i y_i$$

$$\hat{a}_0 \sum_i z_i + \hat{a}_1 \sum_i v_i z_i + \hat{a}_2 \sum_i z_i^2 = \sum_i z_i y_i$$

Sistemul se poate scrie în formă matriceală astfel:

$$\begin{pmatrix} n & \sum v & \sum z \\ \sum v & \sum v^2 & \sum vz \\ \sum z & \sum vz & \sum z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum yv \\ \sum yz \end{pmatrix}$$

Se notează:

- matricea coeficienților cu X
- matricea necunoscutelor cu A
- matricea termenilor liberi cu Y

Sistemul se scrie astfel:

$$XA = Y$$

Soluția se obține: $A = X^{-1} Y$

Exemplu

y	v	z	v^2	z^2	vz	yv	yz
10	1.5	0.8	2.25	0.64	1.2	15	8
11	1.5	1	2.25	1	1.5	16.5	11
12	2	1.5	4	2.25	3	24	18
14	2	2	4	4	4	28	28
15	2	1.8	4	3.24	3.6	30	27
16	2.2	1.8	4.84	3.24	3.96	35.2	28.8
16	2.5	2	6.25	4	5	40	32
17	2.4	2.4	5.76	5.76	5.76	40.8	40.8
16	2.4	2.1	5.76	4.41	5.04	38.4	33.6
18	3	2.1	9	4.41	6.3	54	37.8
18	3	2.6	9	6.76	7.8	54	46.8
18	3	2.4	9	5.76	7.2	54	43.2
19	3.2	2.5	10.24	6.25	8	60.8	47.5
19	3.3	2.2	10.89	4.84	7.26	62.7	41.8
21	3.5	2.8	12.25	7.84	9.8	73.5	58.8
240	37.5	30	99.49	64.4	79.42	626.9	503.1

Matricele

$$X = \begin{pmatrix} 15 & 37,5 & 30 \\ 37,5 & 99,49 & 79,42 \\ 30 & 79,42 & 64,4 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 240 \\ 626,9 \\ 503,1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4,104588 \\ 2,842506 \\ 2,394573 \end{pmatrix}$$

3.2.3 Interpretarea estimațiilor obținute pentru parametri

- Interpretarea lui $\hat{a}_1$:

La o creştere a venitului cu o unitate (o mie de lei), cererea pentru servicii (*y*) creşte, în medie, cu 2,842506%, în condițiile în care oferta (*z*) rămâne constantă.

- Interpretarea lui $\hat{a}_2$:

La o creştere a ofertei (redată prin investiții) cu o unitate (1 milion lei), cererea pentru servicii creşte, în medie, cu 2,394573%, în condițiile în care veniturile rămân aceleaşi.

Interpretarea se referă şi la semnul parametrului. Dacă semnul este plus, relația dintre *y* şi *x* este de acelaşi sens (creşte *x*, creşte şi *y*; scade *x*, scade şi *y*).

Dacă semnul este minus, relația este de sens invers (creşte *x*, scade *y*).

Parametrul $\hat{a}_0$ nu are o interpretare economică, dar se poate considera ca fiind nivelul variabilei-efect când factorii determinanți sunt nuli.

În general, în modelul multifactorial, interpretarea parametrului estimat $\hat{a}_j$ indică cu cât se modifică (creşte sau scade, în funcție de semnul parametrului) în medie variabila-efect (*y*) la o creştere cu o unitate a factorului x_j în condițiile în care ceilalți factori determinanți introduşi în model sunt considerați constanți.

3.3 Aplicarea modelului econometric multifactorial

Alegerea variabilelor independente din model (a variabilelor factoriale) reprezintă o primă problemă care se cere rezolvată. Sursele de informații care pot sugera cele mai importante cauze care determină variabila dependentă sunt:

- Manualele de economie, fie că se referă la teoria economică în general, fie la macroeconomie sau microeconomie, la sectoare ale economiei sau domenii de activitate, includ informații referitoare la factorii determinanți;
- Reviste sau publicații științifice în care pot apărea cercetări similare, dar şi unele care au doar tangență cu tema propusă. Exemple: Studii şi cercetări de calcul economic şi cibernetică economică, Revista Română de Statistică, Piața de capital, Economistul, Revista financiară, etc;
- Periodice în care sunt publicate trimestrial sau lunar date şi analize conjuncturale, precum buletinele Comisiei Naționale de Statistică sau ale BNR.

3.3.1 Datele numerice

O altă problemă o reprezintă datele numerice şi accesul la un număr suficient de date de calitate.

Sursele cele mai importante de date pot fi:

- buletinele statistice (producția, comerțul exterior, prețurile);
- anuarele statistice (date privind indicatorii macroeconomici, situația pe județe, indicatorii resurselor, comerțul internațional);
- buletinele Băncii Naționale a României (serii de date privind inflația, dobânzile, creditul, exportul, importul);
- buletinele diverselor instituții, privind calitatea vieții (statistica bugetelor de familie)
- evidențele agenților economici (bilanțul);
- anchetele pe teren prin care pot fi obținute şi date cu privire la factorii latenți, de natură psihologică, etc.

În etapa culegerii datelor, pot să apară următoarele aspecte:

a) posibilitatea de a utiliza serii cronologice de date (valori anuale, trimestriale, lunare) sau de a utiliza serii transversale (un eşantion de localităţi, familii, întreprinderi). Pentru a opta între cele două alternative se are în vedere existenţa de date în aceeaşi alternativă pentru toate variabilele. Se optează pentru serii cronologice dacă scopul este obţinerea de prognoze în timp, respectiv optica transversală pentru analizarea rolului fiecărui factor.
b) datele la care avem acees nu se referă exact la variabilele preconizate spre a forma modelul, dar există posibilitatea de a le înlocui cu variabile foarte apropiate ca şi conţinut. Exemplu: venitul permanent disponibil se poate înlocui cu venitul brut, cererea cu vânzările, oferta cu producţia.
c) datele sunt mult prea puţine, nu se pot forma serii de cel puţin 15-20 termeni. Se recomandă înlocuirea datelor anuale cu cele trimestriale sau lunare sau suplimentarea numărului de cazuri din eşantion pentru seriile transversale.
d) datele sunt susceptibile de erori, ceea ce implică verificarea lor atât din perspectiva cantitativă (absenţa de valori în unele cazuri, absenţa unităţii de măsură, greşeli de calcul), cât şi calitativă (valori aberante total atipice, indicatori obţinuţi în condiţii diferite în ce priveşte metoda sau aria de cuprindere) Se recomandă efectuarea de corecţii (completări, corectarea calculelor, eliminarea valorilor aberante).

O atenţie deosebită trebuie acordată valorilor exprimate în preţuri curente. În frecvente cazuri este necesară deflaţionarea datelor (împărţirea valorilor exprimate în preţuri curente la indicele de preţuri, în vederea exprimării valorilor în preţurile anului de bază la care se referă indicele).

3.4 Modele neliniare

Pentru descrierea unui număr mare de procese economice sunt necesare modele neliniare.

3.4.1 Modele neliniare în raport cu variabilele dar liniare în raport cu parametrii

Parametrii sunt la puterea 1. Aceste modele pot fi convertite în modele liniare prin transformări corespunzătoare.

Exemple:
Producția vegetală = $a + bX + cX^2 + u$,
unde X este umiditatea solului.
Pentru $X^2 = Z$, modelul devine:
Producția vegetală = $a + bX + cZ + u$

Prețul produsului = $a + b(1/Q) + u$,
unde Q = cantitatea existentă pe piață.
Pentru $1/Q = Z$, modelul devine:
Prețul produsului = $a + bZ + u$

Producția industrială $Q = AM^aK^be^u$,
unde Q = producția, M = munca,
K = capitalul, e = 2,71... .
Se logaritmează şi se notează: $\ln Q = y$,
$\ln M = x$, $\ln K = z$, $\ln e = 1$, $\ln A = c$.
Modelul devine: $y = c + ax + bz + u$

Pentru fiecare exemplu de model neliniar s-a ajuns la o formă liniară de reprezentare, abordabilă în ceea ce priveşte estimarea parametrilor prin metoda celor mai mici pătrate.

3.4.2 Modele neliniare, neabordabile prin MCMMP

Variantele neliniare neabordabile prin metoda celor mai mici pătrate sunt fie modele neliniare în raport cu parametrii (cel puțin un parametru e la o putere diferită de 1), fie în raport cu parametrii, dar şi cu variabilele, fie reprezentări în care variabila reziduală este inclusă în model într-o formă care împiedică liniarizarea.

Exemple
Funcția de cost de forma:

$$y = a + \sqrt{b}X + u$$

unde b este la puterea 1/2, model neliniar în parametrul b.
Funcțiile de consum de forma:

$$y = aX + a^2Z + u$$

model neliniar în parametrul *a*.
sau:

$$y = a + bx^c + u$$

sau:

$$y = \frac{1}{1 + e^{ax+b}} + u$$

Funcția de producție:

$$y = ax^b z^c + u$$

unde variabila reziduală *u* este inclusă în variantă aditivă, ceea ce face dificilă liniarizarea.

În astfel de situații nu se recomandă utilizarea MCMMP, din următoarele motive:

- pentru reprezentările în care cel puțin un parametru apare la o putere diferită de 1, nu este sigur că estimațiile sunt compatibile cu un minim global în ce privește suma pătratelor reziduurilor;
- pentru reprezentările în care modalitatea de includere a variabilei reziduale nu permite liniarizarea, nu pot fi argumentate prezumțiile conform cărora variabila reziduală este normal distribuită, având media egală cu zero şi dispersia finită şi relativ constantă pe segmente de valori.

Pentru obținerea de estimații privind parametrii se apelează la algoritmi care aplică metode numerice în vederea obținerii de soluții în cazurile de neliniaritate.

Etapele algoritmului

1. Inițializarea parametrilor;
2. Determinarea sumei pătratelor valorilor reziduale obținute;
3. Modificarea valorilor ultimelor estimații, astfel încât suma să se diminueze;
4. Se compară ultima sumă cu cea anterior obținută şi se reia procesul de la pasul 3 până când mărimea sumei converge spre o valoare stabilă.

3.5 Variabile calitative în economie

În economie, alături de procese cantitative, care pot fi măsurate, există şi variabile a căror intensitate este exprimată prin atribute: serviciu satisfăcător / nesatisfăcător; apreciere excelentă, foarte bună, bună, mulțumitoare, negativă; risc maxim, moderat, minim.

Variabilele care se referă la însuşiri, calități, categorii, a căror intensitate este exprimată prin atribute, grade de comparație, aprecieri sunt variabile calitative.

Rolul factorilor de natură calitativă este important pentru analiza şi prognoza proceselor economice.

Exemple

- Producția depinde de dotarea cu utilaje şi de numărul de angajați, dar şi de managementul procesului de producție;
- Economiile populației sub formă de depozite la o anumită bancă depind de rata dobânzii, dar şi de încrederea deponenților în banca respectivă;
- Vânzările de bunuri durabile depind de preț, dar şi de calitate sau de temerile cumpărătorilor cu privire la accentuarea inflației;
- Exportul unui produs pe o piață depinde de prețul ofertei, cursul de schimb, dar şi de renumele mărcii şi încrederea existentă pe acea piață privind calitatea produsului;
- Situația de a fi acceptat sau nu în urma unui interviu depinde de prestație, vârstă, putere de convingere;
- Starea de spirit a populației depinde de frecvența conflictelor sociale, venituri, gradul de stabilitate şi competența guvernanților, etc.

În termenii econometriei, introducerea factorilor de natură calitativă, în situațiile în care rolul lor este presupus semnificativ, conduce la creşterea gradului de determinare şi la un plus de calitate a estimațiilor obținte pentru parametri.

Problema cuantificării (exprimării prin numere) variabilelor calitative reprezintă o etapă de a cărei rezolvare depinde calitatea analizei economice bazată pe modelul econometric.

3.5.1 Variabilele dichotomice

O variabilă dichotomică ("dummy", simbolizată prin ***D***) admite doar două alternative: da/nu; promovat/nepromovat; masculin/feminin; înainte de momentul *t* / după momentul *t*.

Exprimarea cantitativă se face astfel: se atribuie nivelul 1 unei alternative şi nivelul 0 celeilalte.

Exemplu

Cheltuielile familiilor destinate turismului sunt analizate în raport cu situația de a avea automobil (***D*** = 1) sau de a nu avea automobil (***D*** = 0).

$C = a + b\,\boldsymbol{D}(1,0)$

Cheltuieli (sute lei)	20	40	50	10	10	50
D	0	1	1	0	0	1

Factorii introduşi în model sunt exclusiv de natură dichotomică

În exemplul anterior:

y	20	40	50	10	10	50
x	0	1	1	0	0	1

Se obține

$$\hat{a} = 13{,}3333$$

$$\hat{b} = 33{,}3333$$

Media cheltuielilor (*y*) pentru servicii în turism a celor care nu dețin autoturism (*x*=0) este de (20+10+10):3=13,3333,
iar media pentru *x* = 1 este (40+50+50):3=46,6666

$$\hat{a} = \bar{y}_{x=0} = 13{,}3333$$

$$\hat{a} + \hat{b} = \bar{y}_{x=1} = 46{,}6666$$

Factorii introduşi în model reprezintă o *variabilă cantitativă* şi o *variabilă calitativă*

Exemplu:

- Consumul de cafea *C*
- Vârsta consumatorului *v*
- Sexul ***D***(1,0), unde ***D*** = 1 (F) şi ***D*** = 0 (M)

$$C = a_0 + a_1 v + a_2 D(1,0) + u$$

Datele

C	2	0	4	2	8	8	12	3	6	4	1	6	6	1	2
v	20	18	30	21	40	50	60	42	35	51	19	62	44	25	40
D	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1

Dacă într-o primă variantă se face abstracție de variabila ***D***, adică se consideră relația de forma:

$$C = a_0 + a_1 v + u$$

Se obține:

$\hat{a}_0 = -2{,}12503$

$\hat{a}_1 = 0{,}173924$

În varianta a doua, considerând ecuația de forma:

$$C = a_0 + a_1 v + a_2 D(1,0) + u$$

Se obțin valorile:

$\hat{a}_0 = -2{,}726331823$

$\hat{a}_1 = 0{,}16098503$

$\hat{a}_2 = 1{,}802923988$

Gradul de determinare prin prisma influenței celor doi factori a crescut. De asemenea, estimațiile sunt mai apropiate de calitățile estimatorilor, comparativ cu prima variantă.

Posibilități de măsurare a variabilei dichotomice

a) Introducerea în calcule a unei alternative (dintre cele două) sub formă de fecvență sau pondere;
b) Modelul Logit.

a) Pentru a exprima intensitatea prezenței unei variabile alternative se poate recurge la însumarea aparițiilor uneia dintre alternative (de exemplu, numărul persoanelor feminine) sau la ponderea frecvenței

înregistrate pentru o alternativă (ponderea rebuturilor, ponderea posesorilor de automobile).

b) Modelul Logit este destinat exprimării într-o formă operațională (rezultate numerice obținute din calcule bazate pe un model matematic) a acelor situații în care creşterea unui factor numeric are drept efect schimbarea unei atitudini de tip dichotomic.

Exemple

Pe măsură ce, în mod experimental, se procedează la creşterea prețului unui produs, o parte tot mai mare dintre amatori îşi schimbă intenția de a cumpăra în contrara acesteia (a nu cumpăra).

O creştere treptată a impozitelor într-un interval dat poate avea drept efect renunțarea unor plătitori de impozite de a mai plăti prin lichidarea activității impozabile fie în mod real, fie în mod declarativ.

Relația de dependență este de tipul $y=f(x)$, unde y poate prezenta două alternative (nu sau da), iar pe măsură ce x înaintează pe scara valorilor x_i ne apropiem de un punct de cotitură de la care alternativa inițială se modifică radical.

Modelul de descriere a unui astfel de proces se bazează pe funcția logistică.

Ponderea răspunsurilor ca urmare a modificării valorilor x_i poate fi reprezentată de egalitatea:

$$P_i = M\left(y = 1/\, x_i\right) = \frac{1}{1+e^{-(a+bx_i)}}$$

Se notează:
$a+bx_i = z_i$
$L = P_i / (1 - P_i)$
atunci $L = e^{z}$, iar $\ln L = z = a + bx_i$
În aplicații, $P_i = n_i / N_i$, unde
n_i = nr. de răspunsuri da în eşantion
N_i = mărimea eşantionului.

Exemplu

Pentru 4 eşantioane de clienți bancari care intenționau să solicite un credit au fost propuse contracte de creditare cu dobândă diferită de

la un eşantion la altul. Situația acceptării împrumutului în raport cu rata dobânzii se prezintă astfel:

Nr. persoane în eşantion	Rata dobânzii	Nr. celor care au acceptat
20	2-6	19
30	6-10	24
20	10-14	14
25	14-18	5

Se organizează datele şi se fac calculele:

x_i	N_i	n_i	P_i	$1- P_i$	L	ln$L$
4	20	19	0.95	0.05	19	2.944439
8	30	24	0.8	0.2	4	1.386294
12	20	14	0.7	0.3	2.3333	0.847298
16	25	5	0.2	0.8	0.25	-1.38629

Se obțin valorile: $a = 4{,}330733$

$b = -0{,}33828$

Funcția logistică are forma:

$$y = \frac{1}{1+e^{-(4{,}330733-0{,}33828x)}}$$

O altă posibilitate utilizată în vederea exprimării numerice a unei variabile calitative presupune înlocuirea acesteia printr-un reprezentant numeric, numită variabilă reprezentant (proxy-variable), intens corelată cu variabila calitativă sau fiind un rezultat (un

subprodus, o implicație) a acesteia, dar care are avantajul exprimării numerice.

Exemple

Variabila calitativă îndemânare (în profesie) este reprezentată de vechime în acea activitate;

Variabila motivare la locul de muncă este reprezentată de evoluția câştigurilor;

Variabila instruire este reprezentată de numărul anilor de studii şcolare.

Introducerea variabilei reprezentant comparativ cu neintroducerea ei (şi implicit absența totală a variabilei calitative din model deşi rolul ei este important) conduce la creşterea gradului de determinare.

O altă modalitate de măsurare a variabilelor caliative este prin atribuirea de numere formând un şir corespunzător creşterii intensității calității unui proces exprimat prin atribute sau categorii de calitate.

Exemple

Şirul ordonat 1, 2, 3, ... corespunde categoriei de încadrare care poate fi hotel de 1 stea, 2 stele, etc.;

Atribuirea de note alternativelor existente într-o scalogramă: 1,2,3,4,5, reprezentând acord cu o afirmație: de loc, slab, mediu, puternic, foarte puternic.

Capitolul 4

Verificarea semnificației statistice a rezultatelor estimării. Testul t, testul F

4.1 Necesitatea etapei verificării

- Datele utilizate provin dintr-un eşantion care nu întotdeauna este reprezentativ;
- Rolul cauzelor accidentale ca şi cel al întâmplătoarelor analogii în ceea ce priveşte evoluțiile factorilor incluşi în model poate conduce la estimații ale parametrilor care fie contrazic aspecte evidente şi anticipate din economie, fie exprimă deformat rolul factorilor;
- Lipsa de experiență şi subiectivismul celui care elaborează modelul econometric, slăbiciuni care se manifestă fie la alegerea factorilor (deseori influențată de dificultățile în obținerea de date), fie la alegerea funcției (predilecția pentru funcția liniară nu este întotdeauna suficient argumentată).

Se recomandă:
- Verificări prin confruntarea cu realitatea economică cunoscută din teorie sau din practică;
- Verificarea în sens statistic a semnificației rezultatelor estimării;
- Verificarea modalității în care o serie de ipoteze (prezumții, aşteptări) se regăsesc în semnalele pe care le transmit rezultatele aplicării modelului.

Verificări ale rezultatelor modelării prin compararea acestora cu realitatea economică

Semnul parametrului poate confirma sau infirma cele cunoscute din teoria şi practica economică.

Exemple:
- În relația preț-vânzări, semnul parametrului corespunzător prețului ar trebui să fie minus.
- Într-o funcție de producție, semnul ataşat factorilor care determină producția ar trebui să fie plus.

Generarea de valori $\hat{y}$ pe baza modelului estimat şi compararea lor cu datele empirice (rezultate din observarea pe teren a variabilei *y*).

Generarea de valori implică înlocuirea în model a simbolurilor $\hat{a}_j$ cu estimațiile obținute pentru parametri şi atribuirea de valori factorilor.

Este de aşteptat ca valorile ajustate $(\hat{y})$ să fie asemănătoare cu cele empirice (*y*), abaterile să fie relativ mici, având o evoluție (în succesiunea obținerii) întâmplătoare, atât ca semn cât şi ca mărime.

Dacă, dimpotrivă, abaterile sunt relativ mari sau prezintă o succesiune sistematică (fie în creştere, fie într-o alternanță a semnului neîntâmplătoare, fie predomină acelaşi semn), atunci trebuie revăzute fie calculele, fie datele, fie specificarea.

În exemplul unifactorial, dependența vânzărilor de numărul populației, se obțin următoarele rezultate:

x	2	3	3	5	6	6	6	7
y	10	12	14	28	30	32	28	35
y ajustat	10.50019	15.44269	15.44269	25.32767	30.27016	30.27016	30.27016	35.21266
u=y -yajustat	-0.50019	-3.44269	-1.44269	2.672329	-0.27016	1.729836	-2.27016	-0.21266

7	8	8	9	10	10	11	12	13
35	40	45	45	52	55	54	58	60
35.2126575	40.15515	40.15515	45.09764	50.04014	50.04014	54.98263	59.92512	64.86762
-0.2126575	-0.15515	4.84485	-0.09764	1.959864	4.959864	-0.98263	-1.92512	-4.86762

Exemplul multifactorial:

v	1.5	1.5	2	2	2	2.2	2.5
z	0.8	1	1.5	2	1.8	1.8	2
y	10	11	12	14	15	16	16
y ajustat	10.28401	10.76292	13.38146	14.57875	14.09983	14.66833	16
u	-0.28401	0.23708	-1.38146	-0.57875	0.900169	1.331667	0

2.4	2.4	3	3	3	3.2	3.3	3.5
2.4	2.1	2.1	2.6	2.4	2.5	2.2	2.8
17	16	18	18	18	19	19	21
16.67358	15.95521	17.66071	18.858	18.37908	19.18704	18.75292	20.75816
0.326422	0.044794	0.339291	-0.858	-0.37908	-0.18704	0.247082	0.241837

4.2 Verificarea semnificației statistice a fiecărui parametru estimat; testul t

Obiectivul verificării constă în aprecierea în sens statistic a mărimii estimației obținute astfel încât să se poată afirma, în mod obiectiv, că respectiva estimație relevă ceva semnificativ, care nu se datorează întâmplării (erorii de sondaj) şi, ca urmare, factorul al cărui rol este cuantificat este realmente determinant pentru procesul analizat.

4.2.1Principalele noțiuni specifice

Semnificație = importanță, relevanță, deosebire marcantă a rezultatului estimării (cu privire la rolul unui factor) în raport cu ceea ce ar rezulta ca urmare a întâmplării. similar poate fi apreciată abaterea dintre două mărimi de aceeaşi natură (două medii de selecție, un nivel estimat şi un nivel adevărat, etc.) în sensul aprecierii dacă abaterea este semnificativă, datorită unei cauze relevante, sau este nesemnificativă, datorită întâmplării.

Test statistic = procedeu ale cărui etape conduc la o concluzie cu privire la o ipoteză preformulată (ipoteza nulă, care neagă semnificația) care poate fi confirmată sau respinsă în baza unei repartiții (normale, *t, F,* χ^2 etc.) şi a unei probabilități de a greşi (α) în ceea ce priveşte concluzia.

Nivel (prag) **de semnificație** = probabilitate, de regulă, prestabilită cu privire la riscul de a greşi în concluzia finală. Astfel, acceptăm că în 5% din cazuri (dacă $\alpha = 0{,}05$) concluzia prin care se afirmă că ipoteza nulă este falsă, poate fi greşită (ceea ce înseamnă că ipoteza nulă este corectă). Întrucât apelăm la datele unui eşantion este necesar să stabilim o limită superioară α (prag de semnificație) până la care acceptăm inerenta incertitudine, rămânând un nivel de încredere rezonabil de mare ($1 - \alpha$).

Interval de încredere = distanță dintre 2 valori (notate z_1 şi z_2, funcții ale valorilor observate, care pot să difere de la un eşantion la altul) în cadrul căreia se plasează cu o probabilitate rezonabil de mare parametrul care formează obiectul estimării. Dacă un astfel de interval îl denumim bilateral, întrucât se extinde de o parte şi de alta a unui nivel-pilot, intervalul unilateral se referă la distanța dintre nivelul-pilot şi una dintre limitele extreme *(*z_1 sau z_2).

Repartiție statistică = mulțimea perechilor ordonate de valori x_i şi p_i, reprezentând, fiecare pereche, nivelul variabilei aleatoare (x_i) şi probabilitatea (p_i), pozitivă sau nulă de realizare a respectivului nivel, $\Sigma\, p_i = 1$.

Grade de libertate = coordonate independente în sensul de valori liber alese pe care le poate înregistra o variabilă dacă este restricționată de condiții ce pot fi prestabilite.

De exemplu, dependența unei variabile *y* de evoluția a *k* factori (independenți între ei) conduce la pierderea unui număr de posibilități de a evolua liber (egal cu numărul factorilor), astfel că rămân *(n – k)* grade de libertate (unde *n* = numărul de cazuri din eşantionul de date).

Ipoteza statistică = presupunere cu privire la repartiția urmată de o variabilă sau cu privire la parametri şi semnificația acestora.

Astfel de presupuneri urmează să fie verificate aşa încât să rezulte fie acceptarea ipotezei nule (H_0), de tip negativist, fie acceptarea ipotezei alternative (H_1) a confirmării supoziției inițiale.

Nivel calculat / nivel tabelat = dacă nivelul calculat rezultă în urma aplicării, de către cel interesat, a unei formule care, de regulă, generează valori comparabile cu cele specifice unei anumite repartiții, nivelul tabelat rezultă în urma preluării dintr-un tabel, corespunzător repartiției, nivel poziționat la intersecția pragului de semnificație acceptat şi gradele de libertate.

4.2.2 Testul t

Întregul demers presupus de testul *t* se bazează pe prezumția conform căreia abaterile estimației $\hat{a}$ de la media sa $M(\hat{a})$ care s-ar obține în cazul repetării estimării pentru mai multe eşantioane de volum identic, urmează o repartiție normală.

Abaterea de la medie împărțită la abaterea medie pătratică

$$\left[\frac{\hat{a}-M(\hat{a})}{\sigma}\right]$$

urmează, pentru eşantioane de volum mic ($n < 30$), repartiția Student.

Se caută o asemenea transformare a estimației obținute încât să devină comparabilă cu nivelul *t* – tabelat pentru (*n–k)* grade de libertate şi un risc α (alfa) apriori ales.

De regulă nu dispunem de mai multe eşantioane ci avem date pentru un singur eşantion. În acest caz considerăm abaterea estimației în raport cu zero:

$$\left[\frac{\hat{a}-0}{\sigma}\right]$$

Relația de calcul, folosind notațiile: $\hat{a}_j$ pentru estimația supusă verificării şi $\sigma_{\hat{a}_j}$ pentru abaterea medie pătratică a estimației, este următoarea:

$$t_{(calculat)} = \frac{\hat{a}_j}{\sigma_{\hat{a}_j}}$$

Rezultatul se compară cu nivelul tabelat pentru un risc acceptat, de exemplu, α = 0.05 şi un număr de grade de libertate egal cu numărul de cazuri (*n*), minus numărul de parametri din model (*k*).

4.2.3 Etapele verificării

1. Stabilirea ipotezei nule (H_0): estimația rezultată nu diferă semnificativ de zero.
2. Eşantionul fiind mic, $n < 30$, se are în vedere repartiția Student.
3. Se determină *t* – calculat, conform relației.
4. Se preia din tabel *t* – tabelat
5. Se compară:

- dacă *t*–calculat < *t*–tabelat se confirmă (H_0)
- dacă *t*–calculat > *t*–tabelat se infirmă (H_0).

Verificarea modelului unifactorial

În cazul modelului unifactorial $y = a + bx + u$
abaterea medie pătratică rezultă astfel:

$$\sigma_{\hat{b}} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum \left(x - \bar{x}\right)^2}} = 0{,}228485$$

$$\sigma_{\hat{a}} = \sqrt{\sigma_u^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum \left(x - \bar{x}\right)^2}\right]} = 1{,}8579$$

t- calculat pentru parametrul $\hat{b}$ este 4,9425 / 0,228485 = 21,63.

t- tabelat, pentru 15 – 2 = 13 grade de libertate şi α = 0,05 este 2,16.

Se infirmă ipoteza nulă şi se acceptă alternativa conform căreia $\hat{b}$ diferă semnificativ de zero, fiind un factor determinant.

Verificarea modelului multifactorial

Dispersia σ_u^2 se înlocuieşte cu estimatorul ei $s^2(u)$, care se obține astfel:

$$s^2(u) = \frac{\sum u^2}{n-k}$$

Pentru a calcula dispersiile parametrilor care apar în modelul multifactorial se înmulțesc elementele de pe diagonala matricei inverse X^{-1} cu $s^2(u)$, considerând factorii în succesiunea apariției lor în model. Abaterea medie pătratică este dată de estimația ei:

$$s(\hat{a}_{j-1}) = \sqrt{s^2(u) d_{jj}}$$

Modelul multifactorial este:

$$\hat{y} = 4{,}1046 + 2{,}8425v + 2{,}39457z$$

$$\sum u^2 = 6{,}221939$$

$$s^2(u) = 6{,}221939 : (15-3) = 0{,}518495$$

$$s(u) = \sqrt{0{,}518495} = 0{,}72$$

Elementele de pe diagonala matricei X^{-1} sunt, în ordine:

$d_{11} = 1{,}16 \quad d_{22} = 0{,}7693 \quad d_{33} = 1{,}0036$

de unde rezultă:

$$s(\hat{a}_1) = 0{,}72 \cdot \sqrt{0{,}7693} = 0{,}6315$$

$$s(\hat{a}_2) = 0{,}72 \cdot \sqrt{1{,}00356} = 0{,}72128$$

$$t_{calc}(\hat{a}_1) = 2{,}8425 / 0{,}6315 = 4{,}5$$

$$t_{calc}(\hat{a}_2) = 2{,}39457 / 0{,}72128 = 3{,}3198$$

Se preia din tabelul repartiției Student valoarea lui *t*.

Numărul gradelor de libertate este:

$n \cdot g \cdot l = n - k = 15 - 3 = 12$

Riscul acceptat $\alpha = 0{,}05$

$t_{0{,}05;\ 12} = 2{,}179$

Se compară *t*-calculat cu *t*-tabelat.

În cazul ambelor estimații

t-calculat > *t*-tabelat.

Se infirmă ipoteza nulă, a nesemnificației şi se acceptă alternativa conform căreia cei doi factori sunt determinanți în studiul efectuat.

Observații

- Semnul fiecărui parametru nu influențează rezultatul comparației dintre *t*-calculat şi *t*-tabelat, întrucât în calculul raportului, estimația este în valoare absolută, deci raportul este pozitiv;
- În cazul eşantioanelor mari, $n > 30$, se poate apela la repartiția normală redusă, pentru care apare variabila *z* care va fi considerată nivelul *t*-tabelat (numărul gradelor de libertate nu mai reprezintă o coordonată);
- Riscul notat cu α poate fi egal cu 0,05. Dacă se doreşte o precizie mai mare, se poate alege o valoare mai mică pentru α, 0,01 sau 0,001, sau, dacă se acceptă un risc mai mare, se poate opta pentru α=0,1.

4.3 Verificarea semnificației rolului ansamblului factorilor asupra variabilei efect

4.3.1 Testul F

Testul *F* urmăreşte verificarea semnificației simultane a tuturor estimațiilor obținute pentru parametri.

Rezultatul verificării se referă la aprecierea pe ansamblu a modelului, considerat ca o reprezentare care descrie un mecanism relațional complet diferit de ceea ce ar putea fi atribuit întâmplării.

Modelul de regresie descrie rolul factorilor determinanți prin parametrii de regresie, iar efectul conjugat al factorilor determinanți rezultă înlocuind parametrii cu estimările obținute şi atribuind valori factorilor.

Se obțin astfel valori ajustate:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + ... + \hat{a}_k x_k$$

Valorile ajustate $\hat{y}$ se abat de la medie $\bar{y}$ în măsura în care factorii se abat la rândul lor de la medie, acționând mai intens sau mai puțin intens.

Abaterile $(\hat{y} - \bar{y})$ se datorează factorilor determinanți incluşi în model.

Suma pătratelor acestor abateri se notează cu *SSR*:

$$SSR = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2$$

Un alt gen de abateri care pot interveni s-ar datora perturbației, acțiunii factorilor reziduali, exprimați prin *u*.

Suma pătratelor acestor abateri datorate întâmplării se notează cu *SSU* şi reprezintă suma pătratelor diferențelor dintre valorile ajustate, generate de model $(\hat{y})$ şi valorile empirice, reprezentate de datele numerice (*y*):

$$SSU = \sum u^2 = \sum (y - \hat{y})^2$$

Este de aşteptat ca rolul factorilor sistematici (x_1, x_2,..., x_k) să fie net superior rolului factorilor perturbatori (*u*), aspect care poate fi verificat prin raportarea celor două sume.

Se apelează la repartiția raportului dispersiilor (repartiția Snedecor), ceea ce implică transformarea sumelor în dispersii şi acceptarea unei probabilități α legate de riscul de a greşi în ceea ce priveşte concluzia.

Raportul dispersiilor se notează F_{calc}, iar *k* reprezintă numărul de parametri:

$$F_{calc} = \frac{SSR/(k-1)}{SSU/(n-k)} = \frac{\sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2/(k-1)}{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2/(n-k)}$$

4.3.2 Etapele aplicării testului F

Se stabileşte ipoteza nulă, a nesemnificației: dispersia de la numărător nu se abate semnificativ de la dispersia de la numitor;

Se determină *F*-calculat:

SSR = 131,778
SSR/(k-1) = 131,78/2 = 65,88902
SSU = 6,221939
SSU/(n-k) = 6,221939/12 = 0,518495
F – calculat = 65,88902/0,518495 = 127,0775

Se caută în tabel: pentru α = 0,01,
k – 1 = 2 grade de libertate (coloană),
n – k = 12 grade de libertate (linie),
se găseşte valoarea *F* – tabelat = 6,93

Se compară F_{calc} cu F_{tab}:

- Dacă $F_{calc} > F_{tab}$, se infirmă ipoteza nulă, ceea ce confirmă modelul ca fiind valid;
- Dacă $F_{calc} < F_{tab}$, ipoteza nulă este confirmată.

În cazul nostru, F_{calc} = 127,0775, mai mare decât F_{tab} = 6,93.

Se poate afirma, cu un risc de a greşi de 1% că estimaţiile sunt , în general, semnificativ diferite de zero, iar modelul în ansamblu este validat.

4.3.3 Coeficientul de determinaţie

Coeficientul de determinaţie exprimă ponderea rolului factorilor determinanţi din model în raport cu variaţia totală a variabilei efect.

Se notează suma tuturor abaterilor *SST*, unde *SST = SSR + SSU*, iar

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSU}{SST} = 1 - \frac{SSU}{SST}$$

În exemplu, *SST* = 131,778 + 6,222 = 138
R^2 = 131,778 / 138 = 0,9549,
adică 95,49% din variaţia efectului este determinată de cei doi factori.

Pentru comparaţii se recomandă varianta ajustată a coeficientului de determinaţie:

$$\hat{R}^2 = 1 - \{[SSU/(n-k)]:[SST/(n-1)]\}$$

În exemplu:

$$\hat{R}^2 = 0{,}9473$$

Capitolul 5

Verificarea confirmării ipotezelor

5.1 Ipoteze privind modelul şi metoda de estimare

1. Datele sunt obținute corect (fără erori sistematice de măsurare) şi în număr suficient de mare (depăşind numărul parametrilor), astfel încât soluțiile să prezinte stabilitate;
2. Variabila factorială (x) este nestochastică şi prezintă aceleaşi valori în eventualitatea repetării sondajului;
3. Factorul (x) prezintă variabilitate în ceea ce priveşte nivelurile înregistrate în cadrul unui eşantion de date (dispersia sa fiind un număr pozitiv finit), astfel încât rolul factorului să poată fi pus în evidență;
4. Modelul de regresie este linar în raport cu parametrii;
5. Modelul de regresie este corect specificat în sensul alegerii funcției potrivite (liniare sau neliniare) şi includerii factorilor determinanți astfel încât gradul de determinare (R^2) să fie suficient de mare;
6. Variabila reziduală este de medie zero şi urmează o repartiție normală, $M(u) = 0$, $u \approx N(0, \sigma^2)$;
7. Variabila reziduală prezintă o dispersie (împrăştiere) egală pentru diferitele valori x_i, adică este homoscedastică;
8. Variabila reziduală nu este corelată cu variabila factorială (x), astfel încât covarianța dintre u_i şi x_i este zero;
9. Variabila reziduală nu este autocorelată, $Cov(u_i, u_j / x_i, x_j) = 0$;
10. Factorii incluşi în model (varianta multifactorială) sunt independenți unii în raport cu ceilalți, nefiind corelați între ei.

Verificările cu privire la confirmarea ipotezelor pot oferi explicații cu privire la motivele pentru care verificarea semnificației (testul t, testul F) nu a condus la rezultatele aşteptate.

Dacă aprecierea modelului este pozitivă, confirmă din perspectiva semnificației şi ipotezelor, se poate trece la etapa utilizării lui pentru analize, prognoze, simulări.

Obstacolele de care se loveşte cercetarea econometrică pot fi redate astfel:

- Multicoliniaritatea;
- Autocorelarea (valorilor reziduale);
- Lipsa datelor;
- Timpul şi banii cheltuiți;
- Heteroscedasticitatea;
- Unicitatea ecuației şi neidentificarea;
- Specificarea incompletă sau incorectă.

5.2 Date suficiente, neafectate de erori sistematice

5.2.1 Considerații asupra necesității abordării problemei datelor

Modalitatea de obținere a datelor nu îndeplineşte condițiile unei observări riguroase (din perspectiva modelării econometrice) similare celor de laborator. Înregistrările numerice la care avem acces au fost realizate în diverse scopuri (evidențe financiar-contabile, raportări statistice, anchete sociale) şi în diverse conjuncturi (metodologii modificate în decursul timpului, întârzieri în consemnarea realizărilor, durate inegale de activitate economică, situații excepționale);

Imposibilitatea obținerii de date privind unele dintre variabilele modelului econometric sau absența unor înregistrări pentru o parte dintre cazuri sau perioade;

Importanța datelor, atât din perspectiva numărului de cazuri, cât şi în ce priveşte calitatea măsurătorilor, pentru acuratețea soluțiilor. Este posibil ca existența unor date eronate, fie şi pentru un singur caz, să modifice estimările, să schimbe rezultatele testelor de semnificație şi, în final, să pună sub semnul întrebării utilitatea modelului.

5.2.2 Verificarea şi aprecierea datelor numerice

Existența de date care se referă indubitabil la variabila-efect, respectiv la fiecare dintre factorii incluşi în model. În cazul în care datele nu corespund acestui deziderat (nu există sau nu pot fi

procurate date suficiente pentru una dintre variabile), se recurge la variabila cea mai apropiată ca sens şi mod de a evolua (variabila reprezentant), în vederea evitării apariției unei zone neexplicate.

Controlul cantității, în sensul aprecierii dacă numărul da cazuri pentru care avem date este suficient de mare, iar pentru fiecarecaz datele sunt complete (există înregistrarea privind y_i, respectiv x_i).

Dacă numărul de cazuri este mult mai mic decât $n = 15$ (nivel apreciat ca satisfăcător, la limită) urmează să mai adăugăm cazuri sau să înlocuim datele anuale cu date trimestriale sau lunare.

Dacă pentru unele cazuri (perioade din seria cronologică, unități din eşantion) datele nu sunt complete sau prezintă suspiciuni, procedăm la corecții, dacă acestea pot fi făcute, sau la excluderea cazurilor respective, dacă aceasta nu conduce la un volum prea mic ($n < 15$) de cazuri.

Verificarea omogenității sub aspectul unității de măsură, definirii indicatorului şi exprimării în prețuri constante (pentru exprimări valorice). O astfel de verificare se referă la fiecare variabilă în parte, aşa încât pe întreg intervalul sau pentru întreg eşantionul variabila să fie exprimată unitar, să rezulte în urma aceluiaşi mod de calcul.

Neglijarea verificării ipotezei privind corectitudinea datelor poate conduce la următoarele:

- Dacă eşantionul este prea mic, estimările pentru parametri sunt instabile (un alt eşantion ar putea oferi estimații complet diferite), iar factorii pot prezenta analogii (evoluții paralele foarte asemănătoare), ceea ce poate afecta de asemenea calitatea estimațiilor;
- Renunțarea la unele variabile din lipsă de date va sărăci analiza şi ar putea mări gradul de nedeterminare sau distorsiona estimațiile;
- Dacă, fie şi pentru o variabilă, datele sunt exprimate într-o formă neomogenă sau prezintă erori sistematice, aceasta afectează grav soluțiile modelului.

5.3 Independența variabilelor factoriale din ecuația de regresie

Dacă între variabilele factoriale ale modelului există asemănări frecvente în ceea ce priveşte evoluția în timp sau în ceea ce priveşte

modificările de la o unitate de observare la alta (familie, județ, firmă), se cosideră că ipoteza cu privire la independența variabilelor cauzale incluse în modelul de regresie este infirmată.

Termenul de *multicoliniaritate* acoperă atât cazul existenței în model a unui număr de 2 factori coliniari (perfect sau parțial coliniari) cât şi la cazul existenței de legături intense între 3 sau mai multe variabile factoriale din ecuația respectivă.

Astfel de legături între variabilele explicative incluse în reprezentări de forma $y = a_0 + a_1x + a_2z + a_3k + u$, pot fi expresii ale unei relații de cauzalitate (x determină pe z, sau atât x cât şi z depind intens de factorul w neinclus în model), pot reprezenta combinații liniare de forma $k = x + 2z$, sau pot fi simple analogii în evoluția înregistrată pe segmentul de n valori de care dispunem.

Toate aceste situații produc aceleaşi efecte dacă asemănările sunt foarte intense:

- estimațiile obținute pentru parametri pot fi deformate;
- imprecizia acestora creşte;
- rezultatele testului t sunt distorsionate în direcția nesemnificației.

5.3.1 Semnale care atrag atenția multicoliniarității:

- În cazul utilizării unui model în care apar 2 factori, de forma: $y = a_0 + a_1x + a_2z + u$:

- Coeficientul de corelație calculat pentru factori (r_{xz}) întrece, în valoare absolută nivelul de 0,85 sau chiar de 0,9;
- Reprezentarea grafică (diagrama împrăştierii), privind exclusiv factorii, semnalează o suspectă ordonare a punctelor de coordonate x_iz_i în jurul unei drepte.

- În cazul în care apar mai mulți factori:

- Coeficientul de determinație (R^2) prezintă valori apropiate de 1 în condițiile în care estimațiile pentru parametri (una sau mai multe) nu trec testul t (nu diferă semnificativ de zero);
- Coeficientul de determinație (forma ajustată) este inferior ca mărime coeficienților de determinație pentru regresiile auxiliare.

- Un semnal este dat şi de determinantul matricei *X*, în sensul că nivelul determinantului devine extrem de mic pe măsură ce gradul de coliniaritate între doi factori creşte (pentru coliniaritatea perfectă, determinantul este egal cu 0, ceea ce face imposibilă rezolvarea sistemului). În plus, valorile foarte mici ale determinantului conduc la valori foarte mari ale elementelor inversei, ceea ce face ca împrăştierea valorilor estimate să fie foarte mare, iar eficiența estimatorului este afectată.

5.3.2 Soluții

- Dacă se pot suplimenta datele, mărind astfel numărul de cazuri în eşantion sau numărul perioadelor în seriile cronologice, aceasta acționează în direcția creşterii mărimii determiantului, mai ales dacă întâmplătoarele analogii în evoluția factorilor se atenuează;
- Dacă în loc de date culese în timp se pot utiliza date în optica transversală, atunci acestea ne aşteptăm să fie mai puțin afectate de corelații între factori;
- Dacă se poate renunța la unul dintre factorii care prezintă o intensă corelație cu un alt factor, atunci eliminarea acestui factor ar fi o soluție. Condiția este ca eliminarea factorului să nu afecteze analiza printr-o pierdere de informație şi nici gradul de determinare în mod semnificativ;
- Dacă nu urmărim în mod expres interpretarea parametrilor ci ne interesează doar atenuarea efectelor multicoliniarității, atunci aşa numita regresie ridge poate fi o soluție. Procedeul constă în adăugarea unui scalar elementelor de pe diagonala inversei şi estimarea în urma unei astfel de modificări.

5.4 Ipoteza privind liniaritatea modelului şi corecta sa specificare

Liniaritatea relației de dependență dintre variabila efect (y) şi factorul determinant (x), respectiv combinația de modificări simultane a factorilor (x_1, x_2, ..., x_k), prezintă interes îndeosebi din perspectiva utilizării metodei celor mai mici pătrate în vederea estimării.

Adesea prin model liniar avem în vedere varianta transformată a modelului neliniar în raport cu variabilele, utilizând logaritmii sau alte procedee.

5.4.1 Verificarea prezumției liniarității

Pe cale grafică, în sensul că diagrama împrăştierii este deseori elocventă, mai ales în cazul unifactorial. În cazul multifactorial (cu deosebire cazul bifactorial) se poate analiza dacă valorile *y*, respectiv *x* ce revin pe unitate de factor partener *z* urmează forma liniară:

$$\frac{y}{z} = f\left(\frac{x}{z}\right);$$

În urma constatării nivelului aproximativ constant al raportului modificărilor paralele de genul:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \approx \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \approx \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

Deseori elaborarea modelului în mai multe variante face posibilă analiza comparativă din perspectiva coeficienților R^2, testul *t*, testul *F*. Rezultatele analizei pot confirma sau infirma liniaritatea modelului în situații în care există cel puțin 2 variante (una liniară, alta neliniară).

În ceea ce priveşte factorii luați în calcul, aceştia trebuie să îndeplinească condiții precum: influența fiecăruia să fie determinantă pentru variabila efect, factorii să nu prezinte analogii intense în evoluție (multicoliniaritatea trebuie evitată), să prezinte variabilitate.

Verificarea incorectei specificări din perspectiva factorilor atraşi în model are în vedere:

- Coeficientul de determinație;
- Semnificația în sensul testului *t*, dar şi a testului *F*.

Un model econometric confirmă aşteptările în ceea ce priveşte funcția liniară adoptată dacă gradul de determinare (R^2) este apropiat de 1 (100%), testele de semnificație (t, F) confirmă modelul, iar abaterile reziduale se comportă precum valorile unei variabile aleatoare.

5.5 Verificarea confirmării ipotezelor privind comportamentul variabilei reziduale

Ceea ce se aşteaptă de la valorile reziduale obținute în final, după estimare, sub forma unor abateri (diferențe) $y - \tilde{y}_i = u_i$ constă în manifestarea lor aleatoare, fără a mai include nimic sistematic.

Modelul poate fi astfel apreciat şi prin prisma modului în care reproduce datele empirice ale variabilei rezultative (y) astfel încât abaterile (erorile) $y_i - \hat{y}_i$ să se caracterizeze prin:

- Egala împrăştiere a valorilor u_i, în prealabil ordonate în raport cu mărimea factorului şi segmentate în două sau mai multe grupe. Termenul grecesc homoskedastic (egal împrăştiat), în limba română *homoscedastic*, caracterizează în econometrie o *egală împrăştiere*, spre deosebire de heteroscedastic, care semnalează inegala împrăştiere;
- Independența oricărei valori u_i în raport cu valoarea / valorile precedentă, astfel încât autocorelarea valorilor reziduale să nu poată fi constatată;
- Repartiția normală, de medie zero a valorilor u_i , ceea ce ar însemna că valorile pozitive sau negative ale abaterilor mici sunt frecvent poziționate în jurul mediei ($M(u)$=0), iar pe măsură ce se abat tot mai mult de la zero, frecvența lor scade.

5.5.1 Verificarea împrăştierii valorilor variabilei reziduale (homoscedasticitatea / heteroscedasticitatea

Împrăştierea este apreciată numeric prin dispersie $\sigma_u^2 = \frac{\sum u^2}{n}$ întrucât $M(u) = 0$;

Calculul dispersiei implică un ansamblu de valori, precum şi media acestora. Pentru a constata egala sau inegala împrăştiere, este necesar să formăm grupe egale de termeni în cadrul şirului de valori $u_1, u_2, ..., u_n$;

Formarea grupelor (în număr de 2, rareori 3 sau mai multe) este precedată de o ordonare a valorilor u_i în raport cu valorile în creştere (sau descreştere) ale factorului. De regulă, de la bun început, nivelurile x_i sunt ordonate fie crescător, fie descrescător;

Problema comportamentului valorilor reziduale se complică întrucâtva în situațiile în care:

- Există mai mulți factori;
- Interesează şi verificarea prezumției privind independența variabilei reziduale în raport cu evoluția factorului (a oricărui factor din model).

5.5.2 Testul GQ (Goldfeld, Quandt)

Etapele testului:

Ordonarea datelor $y_i x_i$, astfel încât valorile x_i să fie ordonate crescător;

Eliminarea unui număr de valori centrale de cel mult $c = n / 3$, dacă seria de date include suficient de multe cazuri (etapa nu este obligatorie). Rezultă două secțiuni de date ordonate în raport cu x_i şi situate spre extreme, de $(n - c) / 2$ cazuri fiecare;

Aplicarea MCMMP fiecărei secțiuni separat în vederea estimării parametrilor, obținerii de valori ajustate $\tilde{y}$ din prima secțiune, respectiv din cea de a doua secțiune, iar, în final, obținerea de valori reziduale (u_i) în fiecare dintre cele două secțiuni;

Obținerea mărimii F_{calculat} , numărătorul fiind pentru secțiunea de împrăştiere maximă:

$$F_{calculat} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{(n-c)/2} u_j^2 \right) : (g \cdot l)}{\left(\sum_{j=1}^{(n-c)/2} u_j^2 \right) : (g \cdot l)}$$

unde $g \cdot l$ = număr grade de libertate

$$g \cdot l = \frac{n-c}{2} - k$$

Compararea valorii calculate (F_{calculat}) cu valoarea tabelată de coordonate

$$\alpha, \frac{n-c}{2} - k; \frac{n-c}{2} - k,$$

unde k = numărul de parametri.

Dacă $F_{calc} < F_{tab}$, prezumția homoscedasticității erorii (u_i) este confirmată;
Dacă $F_{calc} > F_{tab}$, prezumția homoscedasticității erorii (u_i) este infirmată, se acceptă alternativa: eroarea (u_i) este heteroscedastică.
Dacă erorile (u_i) diferă semnificativ ca împrăştiere pe segmente de valori ordonate în raport cu mărimea factorului, estimațiile rezultate prin MCMMP pierd din precizie (heteroscedasticitatea afectează eficiența estimatorului), iar prognozele sunt imprecise.

Remedii în vederea diminuării sau eliminării heteroscedasticității

În situațiile în care numărul de cazuri este suficient de mare (n>30) se poate proceda la elaborarea de modele distincte pentru fiecare dintre segmentele de valori supuse testului.
Transformarea valorilor $y_i x_i$ prin raportarea lor fie la x_i, fie la $\sigma^2_{u(i)}$.

5.5.3 Prezumția neautocorelării valorilor reziduale

Reprezentarea grafică poate să semnaleze situații de posibilă dependență sau de independență a abaterilor.

Verificarea existenței sau inexistenței autocorelării erorilor (abaterilor sau valorilor reziduale) se poate obține prin testul DW (Durbin-Watson).

Restricțiile aplicării testului
- $n > 15$;
- Existența de valori tabelate;
- Existența parametrului liber a_0;
- Relația liniară dintre u_i şi nivelul imediat anterior u_{i-1}.

Etapele testului DW
- Stabilirea ipotezei nule (H_0): valorile reziduale nu sunt autocorelate;
- Obținerea nivelului calculat:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} (u_i - u_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

- Aprecierea nivelului calculat în raport cu apropierea sa de valoarea 2:
  - Apropiat de 2 – cazul neautocorelării;
  - Apropiat de 0 sau de 4 – cazul autocorelării.

- Autocorelarea reziduurilor afectează eficiența estimatorului MCMMP.

Metode de eliminare/atenuare a autocorelației

- Înlocuirea valorilor $y_i x_i$ cu diferențele de ordinul 1 calculate pentru fiecare variabilă în parte:

$$y_i = \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$x_i = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

- Utilizarea de valori transformate, rezultate astfel:

$$y_i^* = y_i - r y_{i-1}$$

$$x_i^* = x_i - r x_{i-1}$$

unde r este coeficientul de autocorelație a erorii:

$$r_{u_i u_{i-1}} = \frac{\sum_{i=2}^{n} u_i u_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

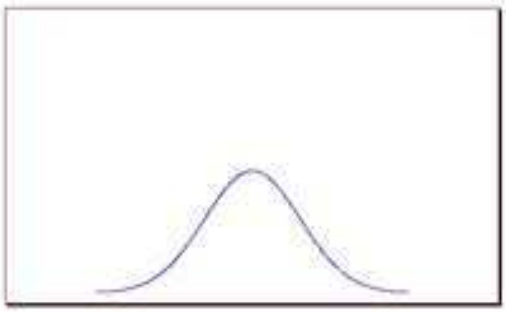
- Adăugarea de cazuri suplimentare sau respecificarea modelului în sensul acceptării unei alte funcții sau introducerii de noi factori dacă există motive suplimentare de a recurge la astfel de variante ale modelului.

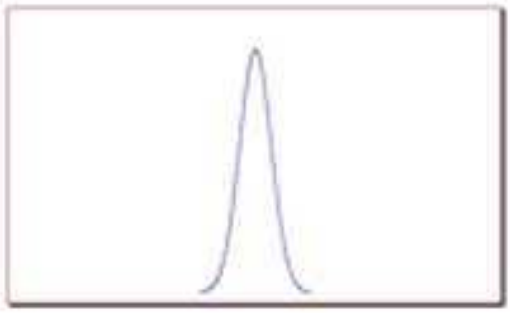
5.5.4 Variabila reziduală urmează o repartiție normală de medie zero

Caracteristica variabilei reziduale de a evolua întâmplător se datorează acțiunii factorilor minori, accidentali, neincluşi în mod explicit în modelul econometric.

Abaterile valorilor empirice de la valorile generate de model ar trebui să fie unele pozitive, altele negative, compensându-se reciproc, astfel încât media să fie zero.

Predominanța valorilor mici, apropiate de zero, şi raritatea abaterilor mari ar trebui să apropie repartiția abaterilor de repartiția unei variabile normal distribuite.





Verificarea

- Se însumează erorile şi se calculează media pentru a constata dacă media este zero sau foarte apropiată de zero;
- Se aplică testul JB (Jarque şi Bera).

Notații:

- S = coeficientul de asimetrie

$$S = \frac{\text{media} - \text{modul}}{\text{abaterea medie patratica}} = \frac{M(u) - M_0}{\sigma_u}$$

- k = coeficientul de boltire

$$k = \frac{\frac{1}{n}\sum\left(u - \bar{u}\right)^4}{\left(\sigma_u^2\right)^2}$$

- Se calculează:

$$JB = n\left[\frac{S^2}{6} + \frac{(k-3)^2}{24}\right]$$

Nivelul obținut pe baza acestei relații urmează asimptotic (pe măsură ce mărimea eşantionului creşte) distribuția χ^2 cu două grade de libertate.

În cazul în care corespondentul *JB* în tabelul distribuției (cel mai apropiat nivel pe rândul 2) se situează pe coloana $\alpha < 0{,}3$ sau, mai bine $\alpha < 0{,}2$ (ceea ce implică o probabilitate de 0,7, respectiv 0,8) se afirmă că abaterile u_i urmează o repartiție normală.

În situația în care nu se confirmă prezumția conform căreia abaterile u_i urmează o repartiție normală, de medie egală cu zero, rezultatele testului *t* şi ale testului *F* sunt discutabile. Aceste teste se bazează pe prezumția normalității repartiției erorii în condițiile unui eşantion suficient de mare.

Soluția cea mai indicată în astfel de situații este suplimentarea numărului de cazuri.

O verificare a datelor utilizate ar putea evidenția fie valori atipice, fie erori de calcul sau de observare care, prin eliminare, ar reduce numărul de abateri mari, apropiindu-se de confirmarea prezumției.

Capitolul 6

Aplicarea modelului de regresie în analiza şi prognoza economică

6.1 Coordonatele analizei economice şi analizei statistice

Rezultatele obținute cu privire la parametrii modelului, dar şi în ceea ce priveşte nivelul unor indicatori obținuți în urma parcurgerii etapei verificării sunt utili îndeosebi analizei economice, analizei statistice, precum şi prognozei.

Analiza economică beneficiază îndeosebi de rezultatele estimării parametrilor de regresie.

Faptul că o estimație $\hat{a}_j$ (j = 1, 2, ...) semnalează în ce direcție şi în ce măsură se modifică variabila-efect (y) la o creştere cu o unitate a factorului x_j, în condițiile în care ceilalți factori incluşi în model sunt considerați constanți, reprezintă o informație deosebit de utilă pentru economistul preocupat de analiza cauzelor care determină un proces.

Ponderea în care factorii determinanți introduşi în model explică modificările variabilei-efect (exprimată de indicatorul R^2) constituie o informație utilă în analiză.

Din perspectiva statisticianului, de un interes aparte se bucură rezultatele etapei de verificare. Testul F şi măsura în care F_{calc} depăşeşte nivelul tabelat dă informații referitoare la puterea de influență a factorilor.

O analiză performantă bazată pe rezultatele regresiei multifactoriale presupune confirmarea unor aşteptări privind:

- Semnificația atât pe ansamblu (în sensul testului F) cât şi individual, privind fiecare parametru (testul t);
- Mărimea coeficientului de determinație (R^2>0,8);
- Gradul de corelare existent între factori să fie mic, astfel încât corelația, în valoare absolută să nu depăşească 0,85, iar variabilele factoriale să nu fie dependente.

Analiza comparativă privind factorii sau variantele de model se bazează pe indicatorii:

- Coeficienții beta care permit clasificarea factorilor în raport cu importanța acțiunii lor asupra variabilei-efect;
- Coeficientul de determinație în varianta ajustată, care poate constitui un reper în situații în care există mai multe variante de model pentru a explica aceeaşi variabilă-efect. Se alege varianta cu $\hat{R}^2$ maxim;
- Coeficientul menționat prin simbolul *AIC* (criteriul Akayke) care oferă posibilitatea de a aprecia fiecare variantă de model prin prisma preciziei (apropierii valorilor ajustate de cele reale). Se optează pentru varianta pentru care *AIC* este minim. Se notează cu *k* numărul de factori.

$$AIC = \ln \frac{\sum_i u_i^2}{n} + \frac{2k}{n}$$

6.2 Prognoza economică bazată pe modelul de regresie

Prognoza având la bază rezultatele regresiei statistice are în vedere prezumția menținerii şi în viitor a influenței fiecărui factor aşa cum este exprimată în estimațiile parametrilor de regresie pentru perioada la care se referă datele.

Se consideră că valorile anticipate privind nivelul viitor al fiecărui factor determinant (*x'*) nu provin dintr-un proces net diferit de datele folosite la estimare, iar anticiparea lui este corectă.

Prognoza rezultă în urma introducerii în modelul specificat a estimațiilor pentru parametri, iar pentru factori se iau în calcul valorile anticipate (planificate, preconizate, rezultate din alte calcule de prognoză):

$$y' = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1' + \hat{a}_2 x_2' + ... + \hat{a}_k x_k'$$

La fel cum valorile ajustate nu coincideau cu valorile reale (empirice) *y*, existând abateri notate (*u*), se poate presupune că nici prognozele nu vor coincide cu valorile înregistrate de *y* în viitor.

Eroarea de prognoză se notează cu *e* şi este direct proporţională cu distanţa la care se va situa nivelul anticipat (*x'*) al factorilor în raport cu nivelul lor mediu din perioada trecută şi invers proporţională cu numărul de cazuri din etapa estimării.

6.3 Modele econometrice utilizate în domeniul cererii de bunuri şi servicii

Prezumţii care stau la baza abordării econometrice a cererii

- Orice formă statistică sau economică corectă de exprimare a legăturii dintre cererea de consum a populaţiei şi factorii care o determină poate fi redusă la o funcţie:

$C = f(x_1, x_2, ..., x_k) + u$

- Factorii care determină consumul pot lua orice valoare reală pozitivă;
- Consumatorul (cumpărătorul) procedează, în general, într-un mod raţional, căutând să-şi maximizeze beneficiul subiectiv, presupus de achiziţionarea produsului, investind cât mai puţin;
- Se poate afirma, îndeosebi pentru cazul cererii globale a populaţiei, că funcţia de consum este omogenă de gradul *n*, este derivabilă, cu derivata I pozitivă, iar derivata a II-a negativă, (admiţând un maxim).

Factorii care determină consumul sunt de o mare varietate. În cele mai multe cazuri se consideră cererea (consumul) ca fiind funcţie de venit, precum şi funcţie de preţ. Alături de aceste cauze trebuie avute în vedere şi alte variabile factoriale, cum ar fi: tradiţia, reclama, înzestrarea, moda, sezonul etc., a căror influenţă poate să difere în raport cu produsul/serviciul, categoria de consumatori, starea generală a economiei.

Produse de strictă necesitate (alimente obişnuite, îmbrăcăminte)
C = cerere; *PO* = populaţie

$$C_t = a_0 + a_1 PO + a_2 C_{t-1} + u_t$$

Produse de uz curent

$$C_t = a_0 + a_1 P_t + a_2 P_{inlocuitor} + a_3 V_t + u_t$$

unde V = venit; P = preț

$$C_t = a_0 + a_1 PO + a_2 V + a_3 C_{t-1}$$

$$C_t = V_t\left(a_1 \log V_t + a_0\right), \quad \text{funcția lui Konius}$$

$$\log C_t = a_0 + a_1 \log CT + a_2 \log MF,$$

funcția Hauthakker, unde:

CT = cheltuieli totale;

MF = oferta de mărfuri.

$$C_t = a_0 + a_1 PO_t + a_2 R + a_3 CR_t + u_t$$

unde R =reclama; CR = concurența.

$$C_t = a_0 - a_1\left(\frac{\Delta V_t}{V_t} + \frac{\Delta V_{t-1}}{V_{t-1}} + \ldots\right) + a_2\left(\frac{C}{V}\right)_{t-1} + u_t$$

$$C_t = a_0 + a_1 PO_t + a_2 TM_t + u_t$$

unde TM = temperatura.

Produse de uz îndelungat

$$C_t = a_0 + a_1 V_t + a_2 P_t + a_3 Z_t + u_t$$

unde Z = înzestrarea

$$C_t = a_0 + a_1 V_t + a_2 OF_t + a_3 PO_t + u_t$$

unde OF = oferta

Pentru autoturisme:

$$C_t = a_0 + a_1 Vn_t + a_2 I_{t/0}^{(p)} + a_3 RS_t + u_t$$

unde Vn = venit net; $I(p)t/0$ = indice de prețuri; RS = rata șomajului.

Produse de lux

$$C_t = a_0 + a_1 V_t + a_2 OF_t + a_3 A + u_t$$

unde A = anotimpul (sezonul); OF = oferta.

Cererea la nivel macroeconomic (nivel global)

$$\frac{C_t}{V_{t-1}} = a_0 + a_1 \frac{V_t}{V_{t-1}} + a_2 \frac{C_{t-1}}{V_{t-2}} + u_t$$

unde *V* = venitul

$$C_t = a_0 + a_1\left(\frac{V}{PO} + a_2 PO_t + a_3 TX_t + u_t \right)$$

unde *TX* = taxe şi impozite

Forma liniară a funcţiilor, cât şi prezența repetată a unor factori (venit, preț, numărul populației, cererea din perioada anterioară) arată că există invarianți în acest domeniu.

O anumită diversitate a reprezentărilor este necesară, dată fiind complexitatea domeniului cererii de mărfuri.

Un factor deosebit de activ în acest domeniu este factorul psihologic.

6.4 Producția, factorii determinanți şi funcțiile de producție

Primele studii cantitativiste ale evoluției producției în raport cu factorii determinanți au început cu analize ale creşterii producției agricole în raport cu creşterea volumului de îngrăşăminte şi a cantității de precipitații.

Tot în agricultură a fost elaborat studiul teoretic al autorilor Knut şi Wicksel privind evoluția producției funcție de numărul de muncitori, suprafața cultivată, capitalul utilizat.

Cobb şi Douglas (1928) au exprimat printr-o formulă dependența statistică dintre venitul național (variabila efect) şi factorii muncă şi capital.

Era luat în calcul venitul național al SUA (*y*) în funcție de cuantumul salariilor (exprimând valoric munca – *M*) şi valoarea fondurilor fixe disponibile (exprimând capitalul – *K*) înregistrate în economia SUA pentru o perioadă de *n* ani.

$$y = AM^{\alpha} K^{\beta} e^{u}$$

Prin logaritmare se obține:

$$\ln y = \ln A + \alpha \ln M + \beta \ln K + u = a + \alpha X_1 + \beta X_2 + u$$

unde: $a = \ln A, X_1 = \ln M, X_2 = \ln K$

Modelul fiind liniar în raport cu parametrii, este posibilă estimarea acestora prin MCMMP.

Parametrii α şi β reprezintă elasticitățile parțiale şi exprimă cu cât la sută se modifică producția (y) la o modificare cu 1% a unuia dintre factori, în condițiile în care celălalt factor este considerat constant.

Chenery H.B., Arow R.J. Minchas B.S. Şi Solow R.M. Generalizează funcția de producție Cobb Douglas şi elaborează în 1961 funcția CES, în care elasticitatea substituirii factorilor este considerată constantă:

$$y = A\left(\alpha M^{-\rho} + \beta K^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} \qquad \text{unde } \alpha + \beta = 1, \rho > -1.$$

6.4.1 Ipoteze şi caracteristici în elaborarea şi utilizarea funcțiilor de producție în studiile economice

- Factorii care determină producția sunt nenegativi şi, în mare parte, substituibili;
- Procesul de producție se desfăşoară pe baza unei tehnologii care reduce la maxim consumul de factori şi resurse;
- Funcția de producție presupune un randament global nedescrescător;
- $f(M+K) \geq f(M) + f(K)$ este omogenă de gradul I, ceea ce implică o creştere a producției în aceeaşi măsură cu creşterea factorilor: $f(mM, mK) = mf(M, K)$;
- Funcția este derivabilă, având derivata I pozitivă, ceea ce face posibilă obținerea cuantumului producției suplimentare la o creştere cu o unitate a unuia dintre factori;
- Derivata a doua este negativă, funcția fiind concavă, adică este conformă legii randamentului descrescător, în sensul că, depăşind un punct de maxim, producția înregistrează creşteri din ce în ce mai mici la o creştere constantă a factorilor. Menținerea creşterii economice, în condițiile unor resurse limitate, presupune creşterea continuă a eforturilor de cercetare ştiințifică, tehnologizare, organizare, calificare.

6.4.2 Indicatori utili analizei economice bazate pe funcții de producție

Norma de substituire

Norma de substituire sau rata marginală de substituire a resurselor este utilă în vederea cunoaşterii raportului în care un factor poate fi înlocuit de un altul fără ca producția să se diminueze.
Se calculează derivatele parțiale:

$$f'_M(M,K)dM + f'_K(M,K)dK = dy$$

În ipoteza menținerii producției la acelaşi nivel, adică $dy = 0$, rezultă:

$$S = \frac{dK}{dM} = -\frac{f'_M}{f'_K} = -\frac{\alpha \frac{y}{M}}{\beta \frac{y}{K}} = -\frac{\alpha K}{\beta M}$$

Rezultatul arată câte unități de factor *K* (milioane lei fonduri fixe) pot înlocui o unitate de factor *M*.

Exemplu

Fie funcția de producție:

$$y = 2 + 0{,}5M + 0{,}2K$$

atunci:

$$S = \frac{dK}{dM} = -\frac{0{,}5}{0{,}2} = -2{,}5$$

unități de capital sunt necesare pentru a substitui un salariat.

Elasticitatea

Elasticitatea exprimă proporția în care se modifică producția în cazul în care factorul creşte cu 1%.

$$E_{y/x_j} = \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x_j}{x_j} = \frac{\Delta y}{\Delta x_j} : \frac{y}{x_j};\ \text{dar pentru } \Delta x_j \to 0$$

$$E = \frac{dy}{dx_j} : \frac{y}{x_j}$$

Elasticitatea este dată de raportul dintre randamentul marginal al factorului x_j şi randamentul mediu.

Pentru funcția Cobb-Douglas coeficienții de elasticitate sunt:

$$E_{y/M} = \alpha A M^{\alpha-1} K^{\beta} \frac{M}{y} = \alpha$$

$$E_{y/K} = \beta A M^{\alpha} K^{\beta-1} \frac{K}{y} = \beta$$

În cazul funcției CES se obține:

$$E_{y/M} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta\left(\frac{M}{K}\right)^{\rho}} \qquad E_{y/K} = \frac{\beta}{\alpha\left(\frac{K}{M}\right)^{\rho} + \beta}$$

Randamentul marginal

Randamentul marginal reprezintă indicatorul care oferă posibilitatea de a cunoaşte până la ce nivel este recomandabil să se mărească factorul x_j astfel încât rezultatul (producția) să fie maxim.

Pentru o dependență multifactorială se consideră că toți ceilalți factori se mențin constanți ca nivel.

Pentru a determina punctul extremal se egalează cu 0 derivata parțială a funcției în raport cu x_j :

$$RE\left(x_j\right) = \frac{\partial f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)}{\partial x_j}$$

Exemplu

Funcția care descrie dependența recoltei medii de porumb în raport cu cantitatea de îngrăşăminte chimice este:

$y = 3{,}539 + 0{,}2527x - 0{,}002827x^2$

Pentru obținerea randamentului marginal se egalează cu 0 derivata funcției:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0{,}2527 - 2 \cdot 0{,}002827x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{0{,}2527}{2 \cdot 0{,}002827} = 44{,}694$$

Rezultatul obținut reprezintă nivelul optim al cantității de îngrăşăminte chimice care conduce la o producție maximă în condițiile în care ceilalți factori, neluați în calcul, nu vor prezenta modificări care să perturbe semnificativ rezultatul (recolta). În cazul în care astfel de factori erau introduşi explicit în funcția de producție, nivelul lor ar fi fost considerat constant.

O situație specială o reprezintă cazul când factorii sunt legați printr-o relație restrictivă, urmare a limitării disponibilității, capacitățile de producție, etc.

În astfel de cazuri se apelează la metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Exemplu

Se consideră performanța calitativă ca funcție de îmbinarea a două resurse *F* şi *G* astfel: $y = 2\ logF + 4\ logG$

În cazul în care prețurile resurselor sunt: $p_F = 4$ şi $p_G = 12$, iar bugetul nu poate depăşi 100 u.m., adică $4F + 12G = 100$, se formează funcția auxiliară:

$y_{(m)} = 2\ logF + 4\ logG + m(4F + 12G - 100)$

Se egalează cu 0 derivatele parțiale obținute în raport cu *F*, *G* şi multiplicatorul *m* şi se obține un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute. Soluția este $F = 8{,}3$; $G = 5{,}5$ şi $m = -1{,}9$.

Aplicațiile concrete ale funcțiilor de producție în studiul evoluției variabilelor macroeconomice, ca şi în analiza activității întreprinderilor, au scos în evidență unele aspecte concrete care prezintă un interes deosebit:

- În ceea ce priveşte datele despre rezultate şi factori, se recomandă utilizarea unor serii suficient de lungi privind perioade de stabilitate economică;

• În mod frecvent sunt utilizate valori procentuale, indici cu bază fixă;
• Când se urmăreşte evitarea multicoliniarității se apelează la transformări de genul:

$$y_t^{'} = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t},\ x_t^{'} = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t};$$

• Funcțiile neliniare fac necesară parcurgerea etapei de liniarizare, după care se poate aplica MCMMP pentru estimarea parametrilor;
• În ceea ce priveşte domeniile din economie în care rezultatele obținute prin utilizarea funcțiilor de producție au fost remarcabile, se menționează că îndeosebi la nivel de ramură soluțiile obținute au fost deosebit de utile. Aceasta şi pentru că datele au fost accesibile, iar rezultatele mai uşor de interpretat. Îndeosebi calculele de eficiență în agricultură au beneficiat de pe urma acestor reprezentări.

6.5 Relații financiar - bancare şi reprezentarea lor prin ecuații

Existența şi rolul banilor în economie, precum şi problemele care țin de echilibrul bugetar, dar şi de politicile economice, generează o serie de relații de influență care pot fi analizate şi prognozate cu ajutorul reprezentărilor econometrice.

Realizarea de bunuri şi servicii, ca şi tranzacțiile care au loc au un corespondent în forma bănească.

Este necesară determinarea cantității de bani în circulație, stabilirea vitezei de circulație a banilor, rolul şi cauzele inflației, influențarea fluxurilor de venituri spre buget, stabilirea rolului cheltuielilor bugetare, a injecției de bani în economie, etc. Banii înşişi sunt generatori de relații precum cele legate de costul împrumutului, investirea capitalului, cursul de schimb, etc.

Teoria economică se referă explicit la o serie de relații de cauzalitate între astfel de variabile, iar politicile economice (politica monetară, politica fiscală, politica cursului de schimb) se bazează pe cunoaşterea şi controlul unor astfel de dependențe.

6.5.1 Masa monetară şi factorii care determină cererea de bani

În ceea ce priveşte oferta şi cererea de bani, Mayes consideră că volumul tranzacţiilor, precauţia, scopurile speculative, inflaţia reprezintă factorii care trebuie incluşi în model.

Cererea de bani = *f*(modificarea veniturilor, rata dobânzii din perioada curentă, precum şi din perioada precedentă)

Cererea de bani a populaţiei (Maddala):
CBP = 3,9 + 3438 *PIB* + 0,8 *Rata dobânzii* + 0,8 *Inflaţia* + u

Variantă neliniară (Chiarini):
CBP/Indicele de preţuri = a(Venit $^{\alpha}$ */ Rata dobânzii* $^{\beta}$*)*

Oferta de bani reprezentată în mod frecvent de masa de bani în sens restrâns (M_1) este redată în corespondenţă cu creşterea economică şi rata dobânzii.
Modelul Brunner-Meltzer:
M_1 *= a + b Creşterea rezervelor băncilor comerciale la banca centrală + c Numerar în circulaţie + d Depozite la termen + + e Rezerve speciale + u*

6.5.2 Rata dobânzii şi investiţiile

Rata dobânzii şi rolul ei asupra investiţiilor apare în reprezentări de forma (Wharton, modelul italian):
Rata dob.(t)= f(Rata scontului(t)/Rata dob. titlurilor de valoaret(t-1),Rata dob.(t-1))

Modelul FRB St. Louis:
Rata dob. pe termen lung = f(Masa monetară, Rata dob. din perioada ant., Producţia(t-1))

Rata dobânzii reprezintă de asemenea un factor care apare în funcţiile ce privesc investiţiile. Modelul Klein:

Investiții = a + b PNB + c Rata dobânzii nominale + d Stocul de capital +u

6.5.3 Impozitele şi transferurile

Impozitele şi transferurile sunt influențate în mod determinant de venituri (salarii, profit) şi de intensitatea activităților specifice economiei reale (producție, export, import). Klein utilizează relațiile:

Impozit populație = a + b(Venituri populație din sector privat + +Venituri populație din sector public) + u
Impozit pe profit = a + b Vânzări + c Export + d Import + +eAmortizări + u

Fiscalitatea determină evoluția unor variabile economice, ceea ce face ca variabila impozit să fie regăsită în postura de factor, fie în mod explicit, fie ca element de formare a venitului disponibil sau, în general, a realizărilor nete exprimate valoric. De exemplu (Chiarini):
Solicitări băneşti pentru investiții = a + b (Profit – Impozite) + +cTrend + d Impozite indirecte + u

Transferurile bugetare sunt dependente de rata şomajului, inflație, salariul minimal. De exemplu (Maddala):
Transfer plăți = f(Populație, Rata şomajului, Indicele de prețuri, PNB per capita)

6.5.4 Prețurile şi costurile

Factorii determinanți pentru evoluția prețurilor sunt: salariile, prețul importului, impozitele indirecte, oferta.

Exemple de funcții de prețuri:

Preț = a+ b Salarii + c Indicele prețurilor de import + d Impozite + u

Modelul FRB St. Louis:
Indice de prețuri = 2,05 + 0,8 *Consum în perioada anterioară* + +1,01 *Inflație anticipată + u*

Costurile sunt considerate ca funcție de condițiile specifice de activitate (grad de epuizare a zăcământului, cota de piață a produsului), dar şi funcție de factorii comuni precum: salariul mediu, evoluția prețurilor la import, puterea sindicatelor în negocierea salariilor.

În marile modele, alături de ecuațiile care formează secțiunea economiei reale, în sensul că se referă la consum, producție, investiții, export, se întâlnesc şi ecuațiile care se referă la secțiunea prețuri-salarii şi cele care se referă la relațiile de natură financiar-bancară din economie.

Capitolul 7

Evoluția proceselor economice în decursul timpului

7.1 Problema tendinței generale

Problema evoluției proceselor economice în timp interesează datorită următoarelor:

- Măsurarea rolului unor factori calitativi care îşi desfăşoară acțiunea în decursul timpului (progresul tehnic, acumulările de bunuri, procesele de învățare) poate fi abordată luând în calcul variabila timp privită ca un şir de numere în progresie aritmetică;
- Acțiunea unor cauze care nu afectează instantaneu variabila-efect, ci după un interval de timp (lag) mai mult sau mai puțin îndelungat. De aici interesul pentru cunoaşterea distanței în timp la care se manifestă influența factorilor, intervalul dintre evoluția unor variabile-semnal (variabile precursoare) şi modificarea variabilei-efect, întârzierea la care apar implicațiile economice generate de măsurile guvernamentale;
- Evidențierea invarianților (tendința evolutivă, oscilațiile sistematice) în sensul măsurării intensității acestora şi modelării rolului lor în evoluția viitoare a procesului economic.

7.2 Noțiuni specifice analizei seriilor cronologice

Seria cronologică (de timp, dinamică) reprezintă o secvență de niveluri ordonate în raport cu succesiunea perioadelor (momentelor de timp). Nivelurile se notează cu y_t, $t = 1,2, ..., n$.

Analiza seriilor cronologice (engl. TSA – time series analysis) este o metodă generală de caracterizare a seriei cronologice din perspectiva componentelor sistematice sau aleatoare în vederea măsurării intensității şi continuității lor, astfel încât procesul analizat

din perspectiva temporală să devină predictibil. Analiza recurge la metode specifice: medii mobile, indice de sezonalitate, modele stochastice.

Cronograma este reprezentarea grafică destinată descrierii evoluției unui fenomen în decursul timpului. Se utilizează un sistem de axe rectangulare, axa orizontală fiind pentru evoluția timpului (variabila independentă), reprezentat ca o succesiune de perioade/momente ordonate, iar axa verticală este destinată măsurării procesului economic reprezentat.

Tendința generală (trend) este evoluția în timp a fenomenului analizat, exprimată într-o formă stilizată care reține aspectul general, de creştere, respectiv de descreştere, neafectat de abaterile temporare.

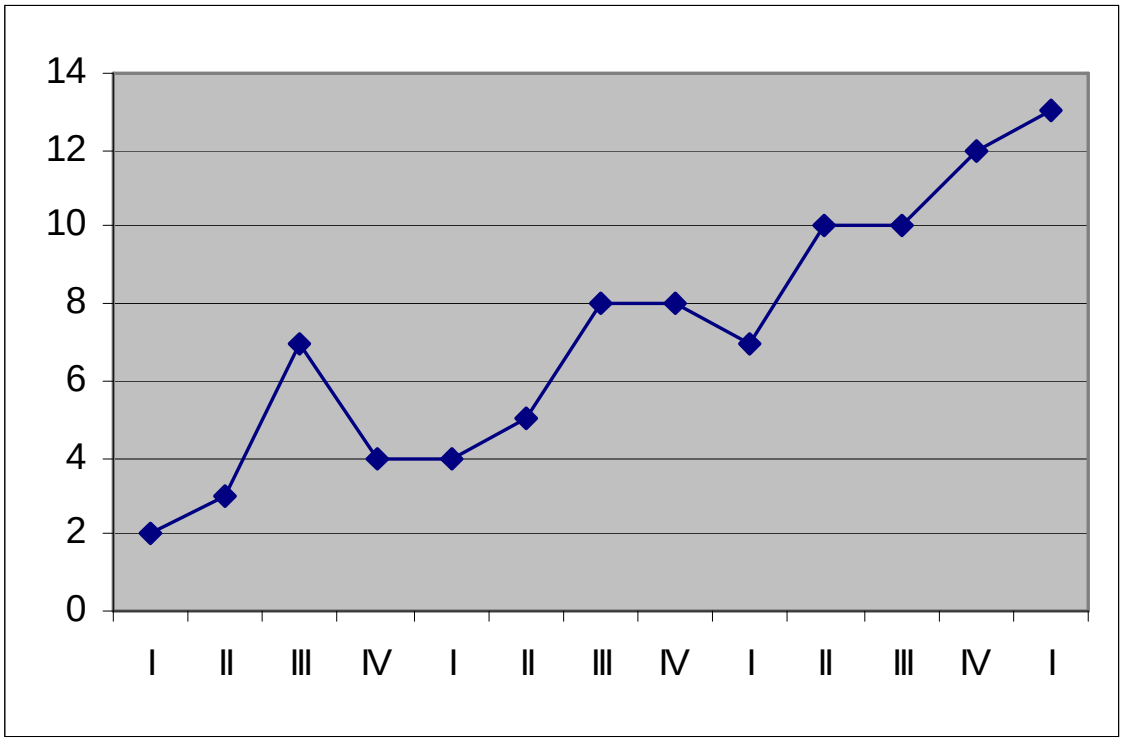
Sezonalitatea este evoluția manifestată prin oscilații repetabile ca sens şi amploare, fie în jurul tendinței, fie în jurul unui nivel mediu, urmare a unor factori care revin periodic la intervale mai mici de 1 an.

Lag este o întârziere exprimată în unități de timp, între modificarea variabilei cauzale şi manifestarea efectului.

7.3 Modelul liniar unifactorial şi calculul tendinței generale

Reprezentarea evoluției în decursul timpului a unei variabile economice este seria cronologică, sub forma unui tabel cu date şi cea grafică (cronograma).

Anul	2007				2008				2009				2010
trim.	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I
y_t	2	3	7	4	4	5	8	8	7	10	10	12	13
t	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6



Atât datele din tabel cât şi reprezentarea lor grafică evidenţiază faptul că, pe măsură ce trece timpul, amploarea fenomenului, în general, creşte. În alte situaţii fenomenul descreşte în intensitate în decursul timpului. Acestea sunt cele două tendinţe de bază.

Variabila *independentă* este *timpul*, notată cu *t*, şi exprimată în unităţi de timp, de perioadă egală, prezentând o succesiune ordonată pe scara timpului.

Variabila *dependentă*, y_t este variabila economică a cărei evoluţie se studiază.

Abaterile, influenţele perturbatoare asupra tendinţei se notează cu u_t.

Modelul devine:

$$y_t = a + bt + u_t$$

Timpul creşte cu un spor constant egal cu 1 (o lună, un trimestru, un an), astfel încât exprimarea sa numerică poate fi reprezentată de şirul numerelor naturale

t = 1, 2, ..., n, dar şi de şirul

t = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... (n impar) sau

t = ...,-2,5; -1,5; -0,5; 0,5; 1,5; 2,5; ... (n par)

astfel încât $\Sigma t = 0$.

În vederea estimării parametrilor *a, b* din modelul $y_t = a + bt + u_t$, se aplică metoda celor mai mici pătrate, ceea ce implică

Σu^2 = minim. În situația în care $\Sigma t = 0$, sistemul de ecuații normale se simplifică şi se obține estimarea parametrilor:

$$\hat{a} = \frac{\sum y}{n} \qquad \hat{b} = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t^2}$$

Dacă se atribuie timpului valori în afara celor *n* unități sau perioade pentru care avem date, se pot obține pe baza modelului, în urma estimării, *niveluri extrapolate ale tendinței*.

Acestea pot fi considerate drept *predicții* pentru procesul analizat (*y*) dacă se acceptă continuitatea condițiilor care au imprimat tendința procesului.

Exemplu

- Se exemplifică determinarea şi extrapolarea tendinței generale pe baza datelor anterioare.
- Se au în vedere următoarele:
  - aspectul general de tip liniar al evoluției descrise de cronogramă;
  - existența unui număr impar de trimestre;
  - calculul produselor $y \cdot t$, t^2 şi obținerea sumelor Σy; Σyt; Σt^2.

Anul	2007				2008				2009				2010	Sume
trim.	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	
yt	2	3	7	4	4	5	8	8	7	10	10	12	13	93
t	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	0
t^2	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	182
y_t	-12	-15	-28	-12	-8	-5	0	8	14	30	40	60	78	150

Se obțin estimațiile:

$$\hat{a} = 7{,}1538$$

$$\hat{b} = 0{,}824$$

iar tendința:

$$\tilde{y} = 7{,}1538 + 0{,}824 \cdot t$$

Valori extrapolate privind tendința:

$$\tilde{y}_{t=7} = 12{,}9212 \quad \text{trim. II } 2010$$
$$\tilde{y}_{t=8} = 13{,}7458 \quad \text{trim. III } 2010$$
$$\tilde{y}_{t=9} = 14{,}5698 \quad \text{trim. IV } 2010$$

Observații

- Nivelul mediu exprimat de ordonata la origine este de 7,1538 pe trimestru;
- Panta exprimată de b = 0,824 indică o creştere (fiind pozitivă) medie trimestrială de 0,824;
- Extrapolările pot fi considerate valori aşteptate în viitor dacă prezența altor componente sistematice (sezonalitate, ciclicitate) este exclusă, iar schimbări majore ale condițiilor din trecut nu intervin.

7.4 Clasificare a seriilor cronologice în raport cu existența sau inexistența tendinței generale

- **Seria staționară** – caracterizată prin oscilații, mai mult sau mai puțin întâmplătoare, ca mărime şi direcție, în jurul unui nivel de referință, media. O serie staționară este rezultatul unui proces stochastic staționar pentru care media şi dispersia sunt constante, indiferent de momentul de la care începe seria.
- **Seria nestaționară** – care prezintă tendință de creştere sau de scădere, ceea ce face ca media valorilor y_t să difere, funcție de momentul de început al seriei. Tendința specifică seriei nestaționare poate fi:
- de tip *determinist* – fiind invariabilă pe un interval mare de timp, atât ca direcție cât şi ca pantă. O astfel de serie este uşor de prevăzut, valorile extrapolate satisfac din perspectiva preciziei;
- de tip *stochastic* - în sensul că pe segmente de timp, dispuse în succesiune, poate prezenta unele modificări, îndeosebi în ce priveşte panta.

În modelare se urmăreşte izolarea tendinței generale în vederea analizei fluctuațiilor sistematice (sezonalitatea, analiza spectrală) sau

în vederea analizei propagării abaterilor de la tendință (modele stochastice de prognoză).

În raport cu modalitatea recomandată în vederea eliminării tendinței, se deosebesc:

- Seria nestaționară de tip T.S.P. (tred stationary process) pentru care trendul se recomandă să fie eliminat prin scădere $Y_t = (y_t - \tilde{y}_t)$ sau împărțire $Y_t = (y_t / \tilde{y}_t)$ ceea ce ar conduce la seria staționară y_t ;
- Seria nestaționară de tip D.S.P. (difference stationary process) pentru care trendul se elimină prin calculul diferențelor de ordin 1: sau 2. $Y_t = (y_t - y_{t-1}) = \Delta y_t$

7.5 Dependețe în economie manifestate în mod sincron sau cu decalaje în timp

7.5.1 Seria integrată, serii cointegrate privind procese economice evolutive

Seria **integrată** este o serie care poate fi redată prin părți componente care pot recompune seria originală prin însumare.

Seria y_t care urmează un trend liniar, prin calculul diferențelor de ordinul 1 devine staționară. Este considerată serie integrată de ordinul I ($I_{(1)}$).

$$Y_t = \Delta y_t = y_{t+1} - y_t, (t = 1,..., n-1)$$

Readucerea şirului termenilor y_t la forma originală implică o însumare a componentelor:

$$y_1 + Y_1 = y_2; y_1 + Y_1 + Y_2 = y_3; ...; y_1 + \sum_{t=1}^{n-1} Y_t = y_n$$

Este posibil să se constate şi alte ordine de integrare decât 1:

- serie integrată ordinul zero ($I_{(0)}$) – seria staționară;
- serie integrată de ordinul doi ($I_{(2)}$) – presupune ca şirul valorilor y_t să ajungă la starea de a fi staționar după transformări care implică determinarea diferențelor de ordinul doi.

Exemple

Cazul 1

y_t : 2; 3; 2; 3; 2; 2; 3; 2; 3 întrucât este staționară este considerată integrată de ordinul zero ($I_{(0)}$) ;

Cazul 2

y_t : 20; 22; 23; 25; 27; 27; 30; 32 întrucât prezintă tendință care poate fi eliminată prin diferențe de ordinul 1, seria este integrată de ordinul 1 ($I_{(1)}$):

Δy_t : 22-20=2; 23-22=1; 2; 2; 0; 3; 2

Cazul 3

y_t : 8; 9; 12; 14; 16; 19; 25; 33; 43 întrucât pentru a fi transformată în serie staționară este necesar calculul diferențelor de ordinul 2, adică într-o primă fază:

Δy_t : 9-8=1; 12-9=3; 2; 2; 3; 6; 8; 10,

iar în faza a doua:

$\Delta^{(2)} y_t$: $\Delta y_{t+1} - \Delta y_t$ = 3-1=2; 2-3=-1; 0; 1; 3; 2; 2

se consideră seria ca fiind integrată de ordinul 2.

Serii **cointegrate** sunt considerate acele serii cronologice care, pe lângă faptul că sunt serii integrate de acelaşi ordin, admit o combinație liniară care este integrată de ordin zero, sau, în orice caz, este integrată de ordin mai mic decât ordinul de integrare al seriilor inițiale.

Exemplu

Fie seriile:

y_t : 1; 2; 3; 4; 5; 6 Δy_t : 1; 1; 1; 1; 1

x_t : 8; 10; 12; 14; 16; 18 Δx_t : 2; 2; 2; 2; 2

ambele integrate de ordinul 1.

Combinația liniară:

$z_t = 2y_t + (1 - 2)x_t$ este o serie integrată de ordin zero:

z_t : - 6; - 6; - 6; - 6; - 6; - 6 $\Delta z_t = 0$

Seriile y_t, x_t sunt cointegrate de ordin(1,0), notate $CI_{(1,0)}$.

Din perspectiva econometriei, seriile cointegrate conduc la o analiză de regresie de calitate, în sensul că estimatorii sunt consistenți, iar testele *t* şi *F* sunt performante.

Din perspectiva analizei statistice şi economice, seriile cronologice cointegrate semnalează o stare de echilibru pe termen lung în ceea ce priveşte stilul de a evolua în timp. Astfel de serii trădează o relație de influență reciprocă, evoluează în acelaşi ritm.

7.6 Modele dinamice destinate includerii efectelor decalate în timp

Efectul celor mai multe dintre impulsurile date economiei prin intermediul factorilor exogeni se resimte după trecerea unui interval de timp.

Motive care provoacă întârzieri în manifestarea acțiunii unui factor pot fi:

- motive de natură *psihologică*: obiceiurile, inerția, teama. De exemplu, o creştere bruscă a venitului nu determină o modificare totală a consumului, pe de o parte datorită obişnuințelor şi gusturilor încetățenite, iar pe de altă parte temerilor că aceasta nu va dura;
- motive de natură *tehnologică*: adaptarea liniilor de fabricație, reconversia forței de muncă, fac ca un impuls privind capitalul sau mâna de lucru să producă un impuls care se va manifesta pregnant după un timp;
- motive de ordin *instituțional* – legate îndeosebi de obligațiile contractuale (care condiționează aprovizionarea, livrarea, încasarea drepturilor, încasarea dobânzii pentru depozite la termen) au, de regulă, darul de a întârzia schimbarea în raport cu modificarea rapidă a unor condiții.

În raport cu durata de aşteptare a efectului, întârzierile pot fi:

- de durată scurtă, de regulă mai mică de 1 an (intensificarea reclamei, vânzările; stimulentele materiale şi producția; creşterea depunerilor şi creşterea veniturilor din dobânzi; creşterea inflației şi accelerarea circuitului banilor);
- de durată medie, între 1-3 ani (modernizarea tehnologiei şi producția; modificări de legislație şi comportamentul economic; îmbunătățirea calității produsului şi creşterea vânzărilor; industrializarea şi calitatea mediului);

• de lungă durată (investițiile în transporturi şi rentabilizarea transporturilor; dezvoltarea învățământului şi creşterea productivității şi calității activităților).

Pentru a evidenția efectul apărut cu întârziere de 1, 2, ... perioade, se foloseşte termenul lag, iar reprezentările care includ factori cu efect întârziat sunt considerate *modele lag* sau *modele dinamice.*

Problemele de măsurare care apar în specificarea şi utilizarea modelului lag în analiza şi prognoza economică sunt:
• stabilirea unității de timp la care se referă fiecare nivel al variabilelor modelului;
• delimitarea întârzierii apariției efectului în urma modificării cauzei;
• estimarea parametrilor.

7.6.1 Stabilirea unității de timp

Stabilirea unității de timp căreia îi corespunde un nivel y_t presupune alegerea între posibilități de a obține date anuale, trimestriale, lunare, săptămânale, eventual cincinale sau decenale.

O unitate de timp prea mare face inaccesibilă depistarea de influențe cu întârzieri de durate scurte, iar alegerea unei unități prea mici poate provoca dificultăți pentru obținerea datelor sau delimitarea întârzierilor de durată lungă.

Opțiunea pentru o anumită unitate de timp trebuie să se bazeze pe particularitățile fenomenului, obiectivele demersului econometric şi pe posibilitățile existente de a obține date privind unitatea de timp considerată revelatoare.

Delimitarea întârzierii apariției efectului în urma modificării cauzei

Cronograma privind evoluția variabilei cauzale, suprapusă cronogramei variabilei efect, poate pune în evidență (prin simpla deplasare a uneia pe axa timpului) o analogie care apare după una sau mai multe unități de timp.

Un procedeu bazat pe sensibilizarea coeficientului de determinație (varianta ajustată) prin introducerea unui factor suplimentar, în sensul de creştere cu încă o perioadă a întârzierii de la care se simte efectul presupune următoarele etape:

- prestabilirea unui interval rezonabil ca mărime după trecerea căruia factorul nu mai poate exercita practic nici o influență notabilă asupra variabilei efect;
- se procedează la estimarea parametrilor, urmată de calculul coeficientului de determinație $\hat{R}^2$ pentru cele *k+1* ecuații (se presupune că după *k+1* perioade de timp factorul nu mai are efect):

$$y(t) = b + a_0 x_{(t)} + u_t$$

$$y(t) = b + a_0 x_{(t)} + a_1 x_{(t-1)} + u_t$$

.....

$$y(t) = b + a_0 x_{(t)} + a_1 x_{(t-1)} + a_2 x_{(t-2)} + ... + a_k x_{(t-k)} + u_t$$

În final se constată pentru care dintre ecuații s-a obținut *cel mai mare nivel al coeficientului de determinație* (ceea ce corespunde variantei cu *cea mai mică dispersie a valorilor reziduale*) şi această ecuație va fi reținută în vederea analizei şi prognozei.

7.6.2 Estimarea parametrilor

În ceea ce priveşte parametrii modelelor cu efect întârziat, aceştia sunt variabili ca număr în raport cu tipul de model rezultat în urma specificării.

Tipuri de modele

Modele unifactoriale în care efectul se simte după o întârziere de o unitate de timp:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + u_t$$

unde *y* poate fi: productivitate, ofertă, recoltă, iar *x* poate reprezenta: utilaje, cerere, umiditatea solului.

Modele autoregresive în care întârzierea este distribuită pe mai multe unități de timp:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + u_t$$

unde *y* reprezintă consumul sau acumulările sau profitul.

Modele mixte în care variabilele cauzale, cu sau fără efect întârziat pot fi de natură exogenă (*x*) sau autocorelate (y_{t-1}):

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + a_3 y_{t-1} + u_t$$

unde *y* poate fi cererea sau calitatea, respectiv *x* poate fi venitul sau utilarea.

Modele în care variabila factorială (*x*) îşi transmite efectul în mod treptat, atât în perioada *t* cât şi pe parcursul unui număr finit de perioade de întârziere (lag distribuit sau întârzieri eşalonate):

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + a_3 x_{t-2} + a_4 x_{t-3} + u_t$$

unde *y* – producția, *x* – investițiile;
y – inflația, *x* – creşterea ofertei de bani;
y – mărimea depozitului, *x* – dobânda cu capitalizare.

Între variantele modelului cu lag distribuit cel mai frecvent apar în studiile aplicative următoarele două reprezentări:

a) varianta descreşterii în timp a efectului generat de modificarea factorului: $y_t = a_0 + a_1\left(x_t + kx_{t-1} + k^2 x_{t-2} + ...\right) + u_t$

unde *k* este constantă subunitară;

b) varianta creşterii treptate a efectului urmată de o descreştere până la anulare:

$$y_t = a_0 + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + ... + b_k x_{t-k} + u_t$$

$$b_1 < b_2 < ... < b_j > b_{j+1} > ... > b_{j+k}$$

7.7 Autodeterminarea proceselor economice în timp; modelele stochastice de tip ARMA

7.7.1 Considerente economice şi statistice pe care se bazează modelul ARMA

Seria cronologică stochează suficientă informație încât să facă posibilă prognoza fără să fie strict necesară cunoaşterea evoluției viitoare a factorilor determinanți pentru procesul urmărit în timp.

Modelul stochastic de prognoză presupune eliminarea tendinței generale din seria de date, dar aceasta nu înseamnă că ar trebui să fie neglijată, ci se urmăreşte obținerea unei serii staționare, utile predicției.

Autodeterminarea este înțeleasă în următoarele sensuri:

1. Autodeterminare ca manifestare a unui anumit grad de *dependență în raport cu propriile realizări anterioare*, urmare a unei particularități a evoluțiilor din economie de a menține un proiect odată început, dar şi de a repeta un comportament devenit tradiție.

Exemple

- În comerțul exterior, intrarea pe o piață externă are drept urmare dezvoltarea exportului pe acea piață cel puțin 2-3 perioade succesive, după care poate urma o stagnare, urmată de perioade de creştere sau descreştere.
- Pe piața valutară, o apreciere a monedei se menține, de regulă, mai multe zile în şir, după care poate fi observată o perioadă de recul.
- În domeniul producției, o reutilare a sectoarelor productive sau o pierdere de piețe de desfacere se reflectă în date, prin valori succesive care depind una de alta. Valorile şirului staționar se succed înregistrând, pentru un interval oarecare, semnul plus (primul caz), respectiv minus.
- Pe piața de capital pot fi constatate valori în alternanță de semn mai ales pe o piață volatilă într-un interval dat.

Un astfel de comportament al evoluției în timp, caracterizat prin legături cu ceea ce s-a realizat în trecut, poate fi reprezentat de un model autoregresiv (AR) de forma:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + ... + a_p y_{t-p} + u_t$$

2. Autodeterminarea sub formă de *acțiuni compensatorii* în vederea contracarării unor ingerințe din afara sistemului.

Exemple

- Absența temporară a unui produs solicitat pe piață are drept urmare o vânzare în exces în perioadele următoare.
- Declanşarea unei greve care diminuează producția într-o perioadă declanşează o creştere a producției în perioadele următoare, în vederea compensării stagnării acesteia şi realizării obligațiilor contractuale.
- O acțiune speculativă de amploare la bursă poate declanşa o abatere semnificativă a cotației dincolo de nivelul fluctuațiilor normale. Ea va fi foarte probabil urmată de o abatere în sens contrar, un fel de corecție, în vederea situării în jurul nivelului de echilibru.

În reprezentările formale specifice modelelor stochastice de prognoză, astfel de manifestări reparatorii sunt redate de modelul de medie mobilă (MA) (movie average). Se consideră că nivelul procesului din perioada *t* depinde de erorile din trecut (abaterile de la normal, de la medie) astfel încât devierea accidentală este urmată de o redresare:

$$y_t = \bar{y} + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + ... + b_q u_{t-q} + u_t$$

Bazat pe aceste elemente, modelul ARMA este definit ca un agregat ce include impulsurile receptate cu întârzieri de 1, 2, ..., *p* intervale de timp, ca şi reacțiile, exprimate în medie, la abaterile accidentale (u_t) de la evoluția liniară, manifestate în urmă cu 1, 2, ..., *q* intervale de timp. Se notează ARMA(*p*,*q*):

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + ... + a_p y_{t-p} + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + ... + b_q u_{t-q} + u_t$$

În cazul prezenței tendinței generale în valorile originale (*yt*), reprezentarea este dată de modelul mixt ARIMA(*p*,*d*,*q*),

unde d = 1 dacă diferențele de ordinul 1 sunt staționare sau d = 2 dacă diferențele de ordinul 2 au condus la staționarea seriei.

Modelul ARIMA(p,d,q), prin transformarea seriei nestaționare în serie staționară devine ARMA(p,q), fără a se uita ordinul diferențelor (d) care au transformat seria.

7.7.2 Obținerea prognozelor

Previziunile obținute în urma utilizării modelului de tip ARMA prezintă o serie de particularități:

- previziunea este o mărime medie, condiționată de niveluri înregistrate în trecut;
- prognoza se obține pas cu pas, în succesiune, întrucât componenta AR obligă includerea în calcul a previziunii pentru perioada $n + t$ în vederea obținerii prognozei pentru perioada $n + t + 1$;
- abaterile reziduale (u_t) influențează prognoza (în modelul MA) doar cu valorile înregistrate până în perioada n (ultima perioadă pentru care avem date);
- prognoza finală (y_{n+t}*) integrează toate componentele care au fost eliminate în etapa de identificare şi estimare (tendința, precum şi media $\bar{y}$).

7.8 Fluctuații sistematice în economie – măsurare, analiză, prognoză

Cunoaşterea variațiilor sezoniere necesită depistarea componentei sezoniere (prin metode grafice), măsurarea lor (prin indici şi coeficienți de sezonalitate) şi analiza diferitelor cauze care definesc ritmul producerii lor (de exemplu, periodicitatea lucrărilor agricole, a concediilor, a sărbătorilor etc).

Ajustarea seriilor cronologice cu variații sezoniere se bazează pe descompunerea seriei, pe de o parte, în componenta trend (f_t) şi componenta ciclică C (când este cazul) şi, pe de altă parte, în

componenta variație sezonieră (S_t) considerând influența aleatoare nulă $\Sigma u_t = 0$), adică:

$y_t = f_t + S_t$ (pentru un model aditiv)

$y_t = f_t \cdot S_t$ (pentru un model multiplicativ)

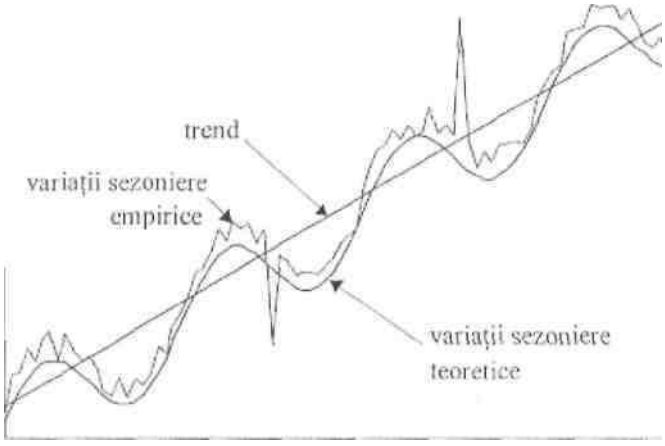
Ajustarea componentei sezoniere *presupune eliminarea influenței sezoniere.* Ajustarea seriilor sezoniere constă în *înlocuirea termenilor reali ai seriei cu termeni calculați şi are ca rezultat obținerea unei serii cronologice cu variații sezoniere riguros identice de la o perioadă la alta şi cu influență nulă la nivelul fiecărui an.*

Această operație se face, de regulă, prin metoda mediilor mobile. Prin această metodă se definesc componenta trend şi componenta ciclică. Pentru "capturarea" componentei sezoniere se calculează indicii de sezonalitate. Pentru izolarea componentei sezoniere se calculează coeficienții sezonieri (S_j), pe baza cărora se desezonalizează seria inițială. Această operație se face prin raportarea valorilor aberante (y_i) la coeficienții sezonieri.

Resezonalizarea este operația inversă desezonalizării, aplicată asupra valorilor calculate prin ajustare. Resezonalizarea se realizează în funcție de modelul de compunere admis, în sens previzional.

7.8.1 Depistarea grafică a variațiilor sezoniere

Grafic, seria ajustată se prezintă sub forma unei linii ondulatorii, cu bucle riguros identice, mai aplatizate față de cronograma inițială, repetabile în jurul liniei de trend.



7.8.2 Ajustarea prin medii mobile

Ajustarea seriilor cronologice cu variații sezoniere prin metoda mediilor mobile *constă în înlocuirea termenilor empirici cu termeni rezultați în urma calculării mediilor mobile pentru seria dată.* Prin înlocuirea termenilor reali cu termeni calculați va rezulta o curbă mai rotunjită sau o dreaptă de tendință, cu condiția ca să se fi determinat corect periodicitatea de variație a fenomenului. Periodicitatea este evidențiată de punctele de maxim sau de minim.

Calculul mediilor mobile constă în aflarea mediilor aritmetice dintr-un număr impar sau par de termeni luați succesiv, în funcție de mărimea unui ciclu de variație. Când numărul de termeni luați în calcul este impar, mediile obținute cad pe termeni reali pe care-i vor înlocui. Când se cuprinde în calcul un număr par de termeni, mediile cad între doi termeni reali.

Pentru a afla ce termen va fi înlocuit se face *centrarea mediilor mobile,* adică se determină media aritmetică din două medii mobile consecutive. Procedeul de determinare a mediilor mobile este evidențiat în tabel.

Valori empirice	Medii mobile calculate din		Medii centrate $\bar{\bar{y}}_i$	Indici de sezonalitate	
	număr impar (de ex. trei) (valori ajustate) $\bar{y}_i$	număr par (de ex. patru)		$\frac{y_i}{\bar{y}_i}\cdot 100$	$\frac{y_i}{\bar{\bar{y}}_i}\cdot 100$
y_1	-	-	-	-	-
y_2	$\bar{y}_1=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$	-	-	$\frac{y_2}{\bar{y}_1}\cdot 100$	-
y_3	$\bar{y}_2=\frac{y_2+y_3+y_4}{3}$	$\bar{y}_1=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$	$\bar{\bar{y}}_1=\frac{\bar{y}_1+\bar{y}_2}{2}$	$\frac{y_3}{\bar{y}_2}\cdot 100$	$\frac{y_3}{\bar{\bar{y}}_1}\cdot 100$
y_4	$\bar{y}_3=\frac{y_3+y_4+y_5}{3}$	$\bar{y}_2=\frac{y_2+y_3+y_4+y_5}{4}$	$\bar{\bar{y}}_2=\frac{\bar{y}_2+\bar{y}_3}{2}$	$\frac{y_4}{\bar{y}_3}\cdot 100$	$\frac{y_4}{\bar{\bar{y}}_2}\cdot 100$
y_5	$\bar{y}_4=\frac{y_4+y_5+y_6}{3}$	$\bar{y}_3=\frac{y_3+y_4+y_5+y_6}{4}$	$\bar{\bar{y}}_3=\frac{\bar{y}_3+\bar{y}_4}{2}$	$\frac{y_5}{\bar{y}_4}\cdot 100$	$\frac{y_5}{\bar{\bar{y}}_3}\cdot 100$
y_6	$\bar{y}_5=\frac{y_5+y_6+y_7}{3}$	$\bar{y}_4=\frac{y_4+y_5+y_6+y_7}{4}$	-	$\frac{y_6}{\bar{y}_5}\cdot 100$	-
y_7	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-

Numărul termenilor din seria ajustată prin medii mobile este egal cu: $N - (n - 2) - 1$, respectiv $N - (n - 2) - 2$, unde:

N, reprezintă numărul termenilor din seria empirică,
n numărul termenilor cuprinşi în calculul mediilor mobile.
Prima relație este pentru un *n* impar, iar a doua pentru un *n* par. De exemplu, când *N* = 7, iar *n* = 3, respectiv *n* = 4, rezultă că seria ajustată poate avea 7 - (3 - 2) -1 = 5 termeni, respectiv
7 - (4 - 2) - 2 = 3 termeni.

7.8.3 Indicii de sezonalitate

Devierile față de valoarea medie, datorate sezonalității, pot fi măsurate prin *indici de sezonalitate.*

Indicii de sezonalitate se determină ca raport între termenii reali şi cei ajustați:

$$i = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100, \text{ respectiv } i = \frac{y_i}{y_{i-2}}$$

7.8.4 Coeficienții sezonieri

Variațiile sezoniere (S_t) se repetă, *teoretic,* identic de la o perioadă la alta (lună de lună, trimestru de trimestru) şi se compensează la nivelul anului, conform principiului de conservare a ariilor. Practic, variațiile sezoniere nu se repetă absolut identic.

Pentru a ajusta o serie reală, respectând exigențele modelului teoretic, variațiile sezoniere S_t observate se înlocuiesc cu valori calculate numite *coeficienți sezonieri,* S_j , j =1,..., p perioade (j=1,..., 12 , pentru luni, respectiv j =1,..., 4 , pentru trimestre).

Calculul coeficienților sezonieri

Coeficienții sezonieri se calculează ca o medie aritmetică a variațiilor sezoniere, lună de lună sau trimestru de trimestru, pe ansamblul a *n* ani:

$$S_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_{ij}$$

unde $S_{ij}=S_t$, j este luna sau trimestrul pentru care se calculează coeficientul sezonier, iar i reprezintă anii observați.

Conform principiului compensării variațiilor sezoniere la nivelul anului, suma, respectiv *media coeficienților sezonieri*, pe an, trebuie să fie zero.

În calcule apar rezultate uşor diferite, ca urmare a aproximărilor. Efectul lor poate fi compensat printr-un *corector „ d_t ”* rezultând un *coeficient sezonier corectat,* S_j' .

În cazul modelului aditiv, corectarea coeficienților sezonieri presupune calculul diferențelor: $S_j' = S_j - d_t$, unde:

$$d_t = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} S_j$$

Rolul coeficientului corector *„ d ”* este de a repartiza eroarea de aproximare pe ansamblul perioadelor, astfel devenind posibilă respectarea *principiului compensării:*

$$\sum S_j^{'} = 0$$

În cazul modelului multiplicativ, corectarea coeficienților sezonieri presupune calculul raportului:

$$S_j^{'} = \frac{S_j}{d_t}$$

iar media lor este egală cu unitatea: $\overline{S} = 1$

Exemplu

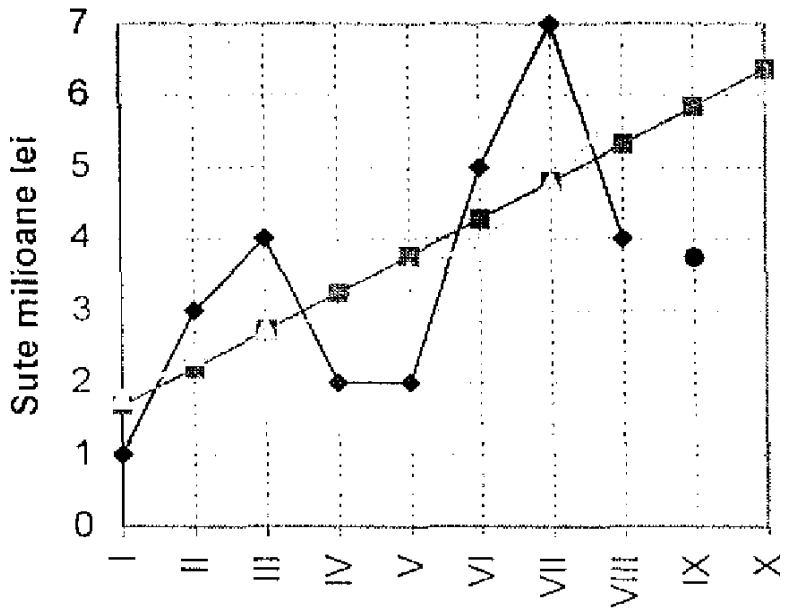
Datele înregistrate trimestrial, pe durata a doi ani, cu privire la cifra de afaceri a unei firme sunt prezentate în tabel. Admitem ipoteza continuității trendului, a stabilității sezoniere şi a lipsei influențelor accidentale. Se cere:

- să se determine tendința seriei
- să se calculeze indicii de sezonalitate şi coeficienții sezonieri
- să se desezonalizeze seria;
- să se extrapoleze seria pentru trimestrul I al anului următor celor observați.

Anul Trim.	1	2
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	2	4

1. **Determinarea tendinței**

Reprezentarea grafică a seriei evidențiază clar o evoluție sezonieră, cu valori maxime în trimestrul 3 şi minime în trimestrul 1. De asemenea, se observă o evoluție medie liniară $f_t = a + b\,t$.



Elementele de calcul pentru linia de trend şi valorile estimate (y_{ti}):

Trim.*) t_i	Valori empirice y_i	$t_i y_i$	t_i^2	Valori estimate y_{t_i}	Indici sezonieri i_t	Valori corectate
1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1,68	0,595	1,773
2	3	6	4	2,20	1,364	2,381
3	4	12	9	2,72	1,470	2,732
4	2	8	16	3,24	0,617	2,920
5	2	10	25	3,76	0,532	3,546
6	5	30	36	4,28	1,168	3,949
7	7	49	49	4,80	1,458	4,781
8	4	32	64	5,32	0,752	5,839
$\sum t_i$ 36	$\sum y_i$ 28	$\sum t_i y_i$ 148	$\sum t_i^2$ 204	$\sum y_{t_i}$ 28	-	27,92

Ecuația de trend liniar pentru seria considerată este:
$y_t = 1{,}16 + 0{,}52\ t.$

2. **Calculul indicilor de sezonalitate şi a coeficienților de sezonalitate**

Indicii de sezonalitate sunt calculați ca raport între valoarea observată y_i şi valoarea calculată corespunzătoare a trendului f_t, respectiv y_t .

Se observă că indicii de sezonalitate variază în jurul unității.

Valoarea lor medie la nivelul unui ciclu sezonier (al unui an, în cazul nostru) este egală cu unitatea. De asemenea, se observă că valorile primului şi ultimului trimestru, din fiecare an, sunt subunitare, în celelalte trimestre sunt supraunitare, şi că valorile lor din fiecare trimestru sunt diferite.

Coeficienții de sezonalitate se calculează ca medie aritmetică simplă a variațiilor sezoniere pentru fiecare trimestru (*Sj*), în cursul celor doi ani considerați (cicluri sezoniere) şi anume:

$$S_1 = \frac{0{,}595 + 0{,}532}{2} = 0{,}564 \qquad S_2 = \frac{1{,}364 + 1{,}168}{2} = 1{,}266$$

$$S_3 = \frac{1{,}470 + 1{,}458}{2} = 1{,}464 \qquad S_4 = \frac{0{,}617 + 0{,}752}{2} = 0{,}685$$

Observații

Media celor patru coeficienți de sezonalitate trebuie să fie egală cu 1, evidențiind faptul că variațiile sezoniere în interiorul unui ciclu se compensează. În cazul nostru, valoarea medie a coeficienților de sezonalitate este egală cu 0,995, valoare ce poate fi admisă, ținând cont de aproximările luate în calcul.

3. **Desezonalizarea seriei**

Desezonalizarea seriei presupune calculul valorilor corectate şi are ca scop obținerea tendinței fără influența sezonieră. Seria desezonalizată se obține prin raportarea valorilor empirice, y_i la valoarea coeficienților de sezonalitate corespunzători, (S_j). Rezultatele sunt prezentate în tabel, coloana 7.

4. **Prognoza nivelului cifrei de afaceri pentru trimestrul 1 al anului următor celor observați**

Folosim modelul de compunere multiplicativ $y_t = f_t \cdot S_t$

unde: f_t - trendul; S_t – componenta sezonieră.

a. **Extrapolarea trendului**. Valoarea prognozată, prin extrapolarea trendului, pentru $t_i = 9$ (trimestrul 1 al anului 3), este:

$$y_9 = 1{,}16 + 0{,}52 \cdot 9 = 5{,}84.$$

b. **Corectarea valorii prognozate**. Corectarea valorii extrapolate cu influența sezonieră presupune *resezonalizarea valorii*, adică:

$$y_9^{(1)} = y_9 \cdot i_1 = 5{,}84 \cdot 0{,}564 = 3{,}7376$$

În concluzie, ne putem aştepta ca cifra de afaceri a firmei "A" să atingă, în trimestrul I al anului trei considerat, valoarea de 3,7376 sute milioane lei, numai dacă se respectă ipotezele admise inițial, şi anume: continuitatea trendului, păstrarea stabilității sezoniere şi lipsa influențelor accidentale.

7.9 Elemente de analiză spectrală pentru studierea fluctuațiilor sistematice

Caracteristic proceselor economice evolutive în timp este faptul că fluctuațiile sezoniere, cele ciclice, oscilațiile de perioadă săptămânală sau de perioadă zilnică se petrec simultan, astfel încât întreaga evoluție în timp poate fi privită ca un agregat de oscilații sinusoidale de diferite frecvențe şi amplitudini.

Perioade de oscilație completă constatate în diverse sectoare de activitate economică sunt:

- în comerț: segmentul de 8 ore, ziua, săptămâna, luna, trimestrul, anul;
- în transporturi: înainte de masă, după masă, intervalul de 24 de ore, săptămâna, anul;
- în producție, productivitatea oscilează în prima parte a zilei, în cea de a doua parte, în decursul săptămânii, dar şi a anului;
- în producția vegetală: anul, trimestrul, săptămâna, ziua;
- în activitatea băncilor cu clienții: ziua de muncă, anul.

Agregatul de oscilație de diverse frecvențe într-un interval dat de *n* unități de timp poate fi exprimat de un polinom trigonometric. Astfel, seria cronologică, după o transformare a ei într-o serie staționară, este reprezentată de o sumă finită de funcții sinus şi cosinus, de forma:

$$y_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{f=1}^{p}\left(a_f \cos\frac{2\pi}{n} f \cdot t + b_f \sin\frac{2\pi}{n} f \cdot t \right) + u_t$$

unde: *t* reprezintă timpul cu valori *t* = 1, 2, ..., *n*;

f = frecvența (numărul de oscilații complete în intervalul de *n* unități de timp) cu valori prestabilite aflate în relație armonică;

a_0, a_f, b_f = parametri:

$\frac{2\pi}{n} \cdot f$ = frecvența redată în radiani.

Frecvența oscilațiilor de diverse perioade trebuie determinată în prealabil. În acest sens este importantă cunoaşterea anumitor elemente privind procesul economic, dependența sa de vreme, tradiție, comportamentul uman, practicile instituționale repetate (începerea activității în învățământ, periodicitatea târgurilor, încasarea

impozitelor şi taxelor în regim preferențial, concediile celor care lucrează în străinătate etc). Datele statistice urmărite în timp, dar şi cronogramele aferente lor, pot da informații despre oscilațiile care apar, perioada fiecăreia şi, prin raportarea intervalului total la durata fiecărei perioade, pot fi stabilite frecvențele. De regulă, o oscilație de bază de frecvență *f* poate avea supraoscilații ale căror frecvențe sunt reprezentate de dublul, triplul etc. frecvenței respectivei oscilații. Relația armonică a frecvențelor înseamnă consonanța dintre undele de frecvență aflate într-un raport care implică multiplii unei oscilații de bază. Ca urmare, *f* = 1, 3, 6, 9, 12, ... sau *f* = 1, 2, 4, 6, 8, ...

În ceea ce priveşte estimarea parametrilor, se caută obținerea de estimații $\hat{a}_f \hat{b}_f$ care să conducă la cea mai bună aproximare a funcției periodice *f* (*t*) printr-o sumă finită de funcții sinus şi cosinus care se notează *y* (*t*). Prin analogie cu MCMMP, se are în vedere integrala:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)-y_n(t)]^2\,dt$$

care atinge un minim atunci când $\hat{a}_f, \hat{b}_f$ sunt **coeficienții Euler-Fourier** ai funcției *f* (*t*). Coeficienții se determină astfel:

$$\hat{a}_f = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t \cdot \cos\frac{2\pi}{n} f \cdot t$$

$$\hat{b}_f = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t \cdot \sin\frac{2\pi}{n} f \cdot t$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum y_t}{n}$$

Pe baza estimațiilor astfel obținute, poate fi determinată **amplitudinea** oscilației de frecvență *f* :

$$A_f = \sqrt{\hat{a}_f^2 + \hat{b}_f^2}$$

O amplitudine mare la perioade subanuale $\frac{n}{f} \le 4$ trimestre sau 12 luni semnalează sezonalitatea; la perioade mai mari de 1 an, pentru care $\frac{n}{f} \ge 4$ trimestre sau 12 luni, este semnalată ciclicitatea; pentru *f* = 1, o amplitudine relativ mare semnalează prezența tendinței generale în seria de date.

Etape de urmat în aplicarea analizei spectrale

1. Culegerea de date pentru un număr suficient de mare de unități de timp (serie lungă de date cu $n > 40$).

2. Eliminarea tendinței dacă seria este nestaționară fie prin scădere, fie prin împărțire, fie prin diferențe de ordinul d.

3. Stabilirea frecvențelor (f) în raport cu perioadele pentru care pot fi admise oscilații complete, fie din teoria şi practica economică, fie observate în reprezentările grafice.

4. Estimarea parametrilor.

5. Verificarea gradului în care seria cronologică poate fi reprodusă de componentele agregate.

6. Determinarea amplitudinii.

Analiza spectrală permite o structurare a procesului evolutiv în timp, în raport cu intensitatea vibrațiilor (oscilațiilor) de diferite frecvențe şi amplitudini. O astfel de abordare a analizei evoluțiilor descrise de seriile cronologice poate conduce la concluzii interesante pentru manageri, planificatori, cercetători în domeniul conjuncturii şi prognozei.

Capitolul 8

Modelul econometric cu ecuații simultane

Modelele pezentate în capitolele anterioare nu satisfac în toate situațiile, datorită următoarelor considerente:

a) În economie există numeroase procese interdependente, fiecare presupunând o buclă feed-back cu influențe bidirecționale.

Exemple:

- Creşterea venitului conduce la creşterea impozitului, iar modificarea impozitului influențează venitul. Fiscalitatea exagerată descurajează obținerea de venituri suplimentare şi invers.
- Cererea depinde de modificarea preşului, dar şi de alți factori care, amplificând-o, antrenează creşterea prețului.
- Creşterea economică este influențată, prin intermediul investițiilor, de rata dobânzii şi influențează, prin solicitările de bani, prețul creditului, adică rata dobânzii.
- Modificarea cursului de schimb, în direcția aprecierii leului, influențează atât exportul (descurajare) cât şi importul (încurajare), iar fluctuația soldului, prin excedentul sau nevoia de valută, influențează cursul de schimb.

b) Economia națională, dar şi economia sectorială sau economia firmei, presupun numeroase legături între procese, precum şi obținerea de transformări (materia primă şi energia se transformă în produse manufacturate, marfa se transformă în bani şi invers). Pentru a cunoaşte şi controla mai bine astfel de transformări, modelul econometric, prin includerea de ecuații care se referă la funcții de producție, funcții de consum, funcții de cost, dar şi la unele echilibre economice, reprezintă o soluție. Având în vedere faptul că economia poate fi privită ca un păienjeniş de dependențe între variabile care formează un lanț de efecte şi cauze, reprezentarea formală trebuie să reflecte acest sistem complex.

c) Realizatorul sau beneficiarul modelului econometric poate urmări obiective multiple dintr-un domeniu, dar poate fi interesat şi de implicațiile dezvoltării domeniului respectiv şi de rolul unor măsuri

care pot influența întreg lanțul cauzal în care se înscrie domeniul. Reprezentarea prin multiple ecuații apropie modelul elaborat de sistemul reflectat (procesul economic) şi face posibilă realizarea de simulări.

8.1 Formele de prezentare ale modelului cu ecuații simultane; modele clasice

Se prezintă în cele ce urmează câteva modele econometrice clasice.

1. Modelul inspirat de teoria lui M. Keynes de determinare a veniturilor la nivel macroeconomic:

Consum = a_0 + a_1 Venituri + u

Venituri = Consum + Investiții + Cheltuieli guvernamentale + Sold comerț exterior

Observații:

Acest model conține o ecuație de regresie şi o identitate.

Veniturile apar în dublă ipostază: de factor în prima ecuație şi de efect în cea de a doua.

Consumul este pe post de efect în prima ecuație şi de componentă factorială în cea de a doua.

Venitul şi consumul se influențează reciproc, evoluând împreună, simultan. O creştere a venitului conduce la modificarea consumului, iar creşterea consumului face ca veniturile să crească.

Înlocuind în a doua ecuație consumul cu expresia sa din prima ecuație, se obține o formă redusă a reprezentării:

Venituri = (a_0 + a_1 Venituri + u) + Investiții + Cheltuieli guvernamentale + Sold comerț exterior

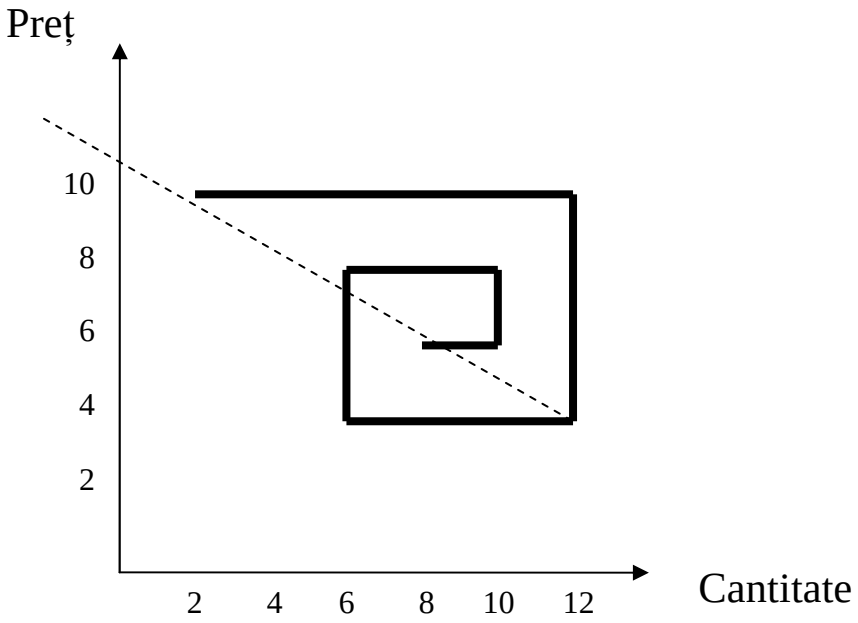
Dacă se izolează variabila Venit, se obține:

$$VEN = \frac{1}{1-a_1}\left(a_0 + INV + CG + Sold\ Cex\right)$$

Raportul $\frac{1}{1-a_1}$ se numeşte în teoria economică *multiplicatorul veniturilor, propus de Keynes*.

2. Modelul echilibrării prețului şi ofertei pe piața produselor cu ciclu lung de fabricație

Un astfel de proces poate începe cu situația în care oferta este mică (q_t = 2), ceea ce face ca prețul să fie mare (p_t = 10); prețul determină producătorii să realizeze şi să ofere o cantitate mult mai mare (q_{t+1} = 12). Cererea fiind depăşită, prețul scade mult (p_{t+1} = 4). Scăderea prețului descurajează producătorii, astfel încât q_{t+2} = 6; ceea ce face ca prețul să crească, devenind p_{t+2} = 7, etc.



Un nivel de echilibru se va situa în jurul valorilor p = 5,5; q = 7.
Modelul care descrie un astfel de proces este următorul:

$p_t = a_0 + a_1 q_t + u_1$
$q_t = b_0 + b_1 p_{t-1} + u_2$

Prețul şi cantitatea sunt interdependente, dar existența întârzierii conferă modelului un **caracter dinamic**.

Dacă se înlocuieşte în prima ecuație cantitatea cu expresia sa, rezultă:

$$p_t = a_0 + a_1(b_0 + b_1 p_{t-1} + u_2) + u_1 = \alpha_0 + \alpha_1 p_{t-1} + v_1$$

ceea ce reduce influențele în sensul evidențierii unui singur factor p_{t-1}.

3. Modelul axat pe fluxurile comerțului exterior

$$EXP = a_0 + a_1 CS + a_2 PIB(K) + u_1$$
$$IMP = b_0 + b_1 CS + b_2 PIB + u_2$$
$$CS = c_0 + c_1(INFL - INFL(K)) + c_2(rataPIB - rataPIB(K)) + \Delta CEX + u_3$$
$$\Delta CEX = EXP - IMP$$

unde: *CS* = cursul de schimb; *INFL* = inflația; *K* = țara în care se exportă; ΔCEX = sold comerț exterior.

Şi în această reprezentare se regăseşte o simultană determinare între cursul de schimb (*CS*) şi soldul comerțului exterior. Modelul este format din trei ecuații de regresie şi o identitate. Sunt patru variabile endogene: *EXP, IMP, CS,* ΔCEX.

4. Modelul *IS – LM* investiții, economii – cerere de bani, masa monetară

Invest = $a_0 + a_1$ Rata dob. + a_2 Venituri + u_1
Consum = $b_0 + b_1$ Venituri disponibile + u_2
Impozite = $c_0 + c_1$ Venituri + u_3
Venituri disponibile = Venituri – Impozite
Venituri = Consum + Investiții + Chelt. guvern. + Sold com. ext.

Între Impozite şi Venituri există o interdependență întrucât o creştere a Veniturilor duce la creşterea Impozitelor, iar acestea, la rândul lor, modifică Consumul şi, implicit, Veniturile.

Modelul este format din trei ecuații de regresie şi două identități. Conține variabilele de tip endogen: Investiții, Consum, Impozite, Venituri disponibile, Venituri şi variabilele de tip exogen: Rata dobânzii, Cheltuieli guvernamentale, Sold comerț exterior.

Aceste modele cu ecuații multiple evidențiază unele aspecte caracteristice:

a) Descriu economia ca o structură de componente şi de relații între componente (relații de dependență, relații de identitate sau de echilibru) prin forma structurală a modelului.

b) Variabila-efect într-o ecuație poate fi variabilă factorială într-o altă ecuație şi invers, fapt pentru care este preferată denumirea de variabile endogene şi variabile exogene (sau predeterminante dacă între factori există şi variabile cu efect întârziat). Variabila endogenă apare într-o ecuație în stânga egalității, ceea ce face posibilă obținerea de valori generate de model pentru o astfel de variabilă; cele exogene apar numai în dreapta egalităților, iar datele pentru ele provin exclusiv din surse externe (statistici, evidențe). Modelul include atâtea ecuații câte variabile endogene are în vedere.

c) Adesea se caută obținerea unei forme reduse a modelului, ca urmare a înlocuirii acelor variabile endogene care apar în postura de factori, cu expresiile lor.

d) Variabila endogenă aflată în postura de efect (rezultat) într-o ecuație de regresie care apare şi în postura de factor în alte ecuații implică dependența unui astfel de factor de variabila reziduală. În consecință, metoda de estimare trebuie adaptată în aşa fel încât ipoteza independenței factorului de variabila reziduală să fie confirmată.

e) Existența de interdependențe între variabile, manifestată sub forma unor bucle de conexiune inversă atrage problema identificării fiecărei ecuații.

Formele de prezentare ale modelului se pot analiza pe următorul model care conține două ecuații de regresie şi o identitate:

$$y_1 = a_0 + a_1 y_2 + a_2 x_1 + u_1$$
$$y_2 = b_0 + b_1 x_2 + u_2$$
$$y_3 = y_2 - y_1$$

Reprezentarea aceasta urmăreşte descrierea unor relații constatate (în practică sau fundamentate în teoria economică) pentru a explica comportamentul unor variabile y_1, y_2, eventual y_3. Întrucât se referă la un proces economic, sistemul de ecuații redă **forma structurală** a modelului.

Forma structurală este importantă nu numai pentru descrierea formală a procesului economic (varianta de bază a modelului), ci şi prin posibilitățile de analiză economică (interpretarea estimațiilor), precum şi de analiză statistică (R^2, testele *F*, *t*, etc.).

Utilizarea notațiilor matriceale conduce la o formă mai concentrată de prezentare, formă care are şi calități legate de generalizarea demersului şi descrierea unor transformări, calcule destinate estimării.

Se notează parametrii ataşați variabilelor endogene cu a_{ij}, iar cei ataşați variabilelor exogene, inclusiv parametrul liber, cu b_{ij}. Cu aceste notații, modelul devine:

$$y_1 = b_{11} + a_{11}y_2 + b_{12}x_1 + u_1$$
$$y_2 = b_{21} + b_{22}x_2 + u_2$$
$$y_3 = y_2 - y_1$$

Ecuațiile de regresie includ necunoscutele (parametrii). Pentru aceste ecuații se izolează variabila aleatoare şi se ordonează pe coloane variabilele:

$$y_1 - a_{11}y_2 - b_{11} - b_{12}x_1 = u_1$$
$$y_2 - b_{21} - b_{22}x_2 = u_2$$

Aceste relații se pot transcrie în forma matriceală astfel:

$$\boldsymbol{AY + BX = U}$$

Redată explicit, relația se prezintă astfel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & 0 \\ -b_{21} & 0 & -b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Forma redusă a modelului reprezintă o modalitate de prezentare care implică o transformare a formei structurale într-o variantă care conduce la redarea explicită a fiecărei variabile endogene (aflate în stânga egalităților) în raport cu variabilele exogene la care se

adaugă variabilele cu efect întârziat. Aceasta implică înlocuirea în dreapta egalităților sistemului de ecuații simultane a tuturor factorilor exprimați de variabile endogene prin expresiile lor exclusiv bazate pe factori exogeni sau cu efect întârziat.

În forma structurală a modelului se constată prezența variabilei endogene y_2 în postura de factor. Înlocuirea acestei variabile cu expresia sa şi a componentelor y_1 şi y_2 în ultima relație conduce la forma redusă.

$y_1 = b_{11} + a_{11}(b_{21}+ b_{22}x_2 + u_2) + b_{12}x_1 + u_1 = b_{11} + a_{11} b_{21}+ b_{12}x_1 + +a_{11} b_{22}x_2 + a_{11} u_2 + u_1$
$y_2 = b_{21} + b_{22}x_2 + u_2$
$y_3 = (b_{21} + b_{22}x_2 + u_2) – (b_{11} + a_{11} b_{21}+ b_{12}x_1 + a_{11} b_{22}x_2 + a_{11} u_2 + u_1) = (b_{21} – b_{11} – a_{11}b_{21}) – b_{12}x_1 + (b_{22} – a_{11}b_{22})x_2 + (u_2 – a_{11}u_2 – u_1)$

Se notează:

$$\alpha_0 = b_{11} + a_{11}b_{21}; \alpha_1 = b_{12}; \alpha_2 = a_{11}b_{22}; v_1 = a_{11}u_2 + u_1$$
$$\beta_0 = b_{21}; \beta_1 = b_{22}; v_2 = u_2$$
$$\gamma_0 = b_{21} - b_{11} - a_{11}b_{21}; \gamma_1 = -b_{12}; \gamma_2 = b_{22} - a_{11}b_{22}; v_3 = u_2 - a_{11}u_2 - u_1$$

Cu aceste notații, forma redusă devine:

$$y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + v_1$$
$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + v_2$$
$$y_3 = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + v_3$$

Dacă interesează doar forma redusă a ecuațiilor de regresie, atunci ecuațiile:

$$y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + v_1$$
$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + v_2$$

pot fi redate în formă matriceală.

Din relația: $AY + BX = U$, rezultă: $AY = - BX + U$, care se înmulțește din stânga cu A^{-1} şi se obține:

$A^{-1} AY = -A^{-1} BX + A^{-1} U$

se notează: $-A^{-1} B = H$; $A^{-1} U = V$, iar $A^{-1} A = I$, astfel încât:

$Y = HX + V$

Forma redusă este utilă în perioada de estimare a parametrilor, iar, în final, după estimare şi verificare, este recomandată pentru obținerea de prognoze şi simulări.

8.2 Stabilirea variabilelor, funcțiilor şi identităților

Pentru a elabora un model econometric format din zeci sau sute de ecuații, este necesar ca specialiştii din statistică, economie, matematică şi informatică să colaboreze. Într-o primă etapă se stabilesc **obiectivele** urmărite prin modelul respectiv. Acestea ar putea fi: analiza economică din perspectiva rolului factorilor determinanți din economie, analiza şi prognoza pentru un sector de activitate economică (ramură, firmă, instituție), prognoza proceselor economice, simularea de politici economice în vederea realizării unor obiective macroeconomice.

Apoi se stabilesc **resursele** în ceea ce priveşte: datele statistice şi acuratețea acestora, gradul de detaliere a unor indicatori, resursele umane, documentația (care se referă la modul în care s-a procedat în situații similare în alte instituții sau centre de cercetare), resursele materiale (dotarea cu calculatoare şi posibilitățile de prelucrare în diverse faze, existența programelor de estimare, testare).

O a doua etapă o constituie **stabilirea variabilelor endogene**. Opțiunile în această privință depind de: obiectivele urmărite, gradul de detaliere urmărit, posibilitățile pe care le oferă baza de date în ceea ce privește existența de date privind variabilele endogene din model.

Între variabilele endogene mai pot fi introduse şi acele variabile factoriale care sunt, la rândul lor, determinate de alți factori cunoscuți ca importanți sau sunt din categoria celor manevrabili de către guvern sau patron.

În etapa următoare se stabilesc **factorii** care determină fiecare variabilă endogenă. Cu alte cuvinte, se stabilesc variabilele care vor figura în fiecare ecuație de regresie în partea dreaptă a semnului de egalitate. Se va ține seama de ceea ce recomandă teoria economică. Întrucât trebuie să ne restrângem la factorii cei mai semnificativi, fiecare dintre variabilele potențial explicative este verificată din perspectivele următoare:

- existența de date statistice corecte şi care să acopere numărul de cazuri (perioade sau unități teritoriale, familiale din eşantion);
- creşterii gradului de determinare în urma introducerii lor în model, precum şi diminuării abaterii medii pătratice a valorilor reziduale;
- independenței sau absenței corelației foarte intense a variabilei candidate la rolul de factor cu o altă variabilă factorială deja inclusă în ecuația de regresie;
- semnificației în sensul testului *t*, mai ales în situațiile în care trebuie să optăm pentru alegerea unei variabile dintre doua candidate pe acelaşi loc.

Alegerea **funcției** (formei legăturii) se bazează pe elementele de teorie economică:

- creştere / descreştere proporțională cu evoluția factorului;
- existența procesului de saturație frecvent constatat în zona cererii, dar şi a producției;
- evoluții explozive într-o direcție sau alta în anumite situații sau pe intervale limitate;
- semnalele oferite de unele metode statistice sau econometrice (reprezentări grafice, testul *DW* în caz de autocorelare, testul *GQ* când eroarea este heteroscedastică, testul *Box-Cox* când se alege între varianta liniară şi cea logaritmică, etc.).

Identitățile sunt introduse în model fie în vederea obținerii unor informații suplimentare, fie pentru a facilita şi consolida în acelaşi timp forma redusă a modelului.

Relațiile de identitate se pot referi la:

- componentele unei variabile economice;
- modul de calcul al unor indicatori;
- echilibre de natură economică.

Etapa specificării poate fi considerată încheiată, într-o primă fază, în situația în care:

- numărul de variabile endogene aflate pe lista obiectivelor urmărite prin crearea modelului este egal cu numărul de ecuații din model;
- factorii fiecărei ecuații sunt suficient de puternici, dar şi de singulari ca rol (independenți de ceilalți factori din ecuație) încât să avem convingerea că dintre variantele permise de datele statistice am ales varianta cea mai bună; similar se pune problema în ceea ce priveşte funcția (forma legăturii) pentru fiecare ecuație.

Într-o a doua fază care urmează etapei identificării, estimării, testării, specificarea poate fi reevaluată în raport cu rezultatele diverselor teste (*F, t, DW*). Unele modificări în ceea ce priveşte factorii sau tipul funcției pot fi avute în vedere, astfel încât testele să confirme fiecare ecuație în condițiile unui grad de determinare suficient de apropiat de 100%.

8.3 Identificare, estimare şi verificare în cazul modelelor cu ecuații simultane

8.3.1 Verificarea modelului din perspectiva identificării fiecărei ecuații

Etapa **identificării** este necesară pentru a ne asigura că fiecare ecuație de regresie din model este distinctă, nu se repetă în ansamblul ecuațiilor modelului.

Din perspectiva **estimării**, caracterizarea fiecărei ecuații drept identificată confirmă faptul că unei anumite ecuații din forma redusă îi corespunde o anumită ecuație şi numai una în forma structurală a modelului. Ca urmare, parametrii formei structurale pot fi estimați pe baza estimațiilor obținute pentru parametrii formei reduse aparținând respectivei ecuații.

O ecuație de regresie din model este considerată **identificată** atunci când nici o altă ecuație asemănătoare (în ceea ce privește variabilele incluse și tipul de funcție) nu este regăsită în model și nici nu poate fi formată utilizând diverse combinații liniare între ecuațiile sistemului.

Modelul în general este considerat **identificat** atunci când fiecare ecuație de regresie este caracterizată drept identificată.

Din perspectiva identificării, ecuațiile pot fi de următoarele tipuri:

- ecuații *identificate* (perfect identificate);
- ecuații *supraidentificate*;
- ecuații *neidentificate*.

Criteriul de departajare îl reprezintă *condiția de ordin:*

- pentru ca o ecuație din forma structurată a modelului să fie considerată *identificată* este necesar ca, din ansamblul variabilelor incluse în ecuațiile de regresie ale modelului, numărul celor absente din ecuația respectivă să fie egal cu numărul de ecuații de regresie minus 1;
- dacă ecuația omite mai multe variabile (decât numărul ecuațiilor de regresie minus 1) este considerată *supraidentificată*.
- dacă ecuația omite mai puține variabile, este considerată *neidentificată*.

Se consideră modelul din paragraful 8.1, din care se reține doar ecuațiile de regresie:

$y_1 = a_0 + a_1y_2 + a_2x_1 + u_1$

$y_2 = b_0 + b_1x_2 \quad + u_2$

Ansamblul variabilelor este format din y_1, y_2, x_1, x_2, deci 4 variabile, iar numărul de ecuații este 2.

În prima ecuație sunt prezente 3 variabile, așadar 1 variabilă absentă, egal cu numărul de ecuații minus 1. În concluzie, prima ecuație este identificată (perfect).

În a doua ecuație sunt prezente 2 variabile, deci 2 variabile sunt omise, mai multe decât 2 ecuații minus 1. Această ecuație este supraidentificată.

Pentru ca una dintre ecuații să fie neidentificată, ar trebui să nu se înregistreze nici o variabilă omisă, deci ecuația să fie de forma:

$y_1 = a_0 + a_1y_2 + a_2x_1 + a_3x_2 + u_3$

Întrucât din ansamblul celor 4 variabile din model se regăsesc în această ecuație 4 variabile prezente, conform condiției de ordin,
$0 < 2 – 1$, ecuația este neidentificată.

Eliminarea neidentificării şi aducerea ecuației la forma identificată sau supraidentificată se poate realiza prin includerea de noi variabile în model (mai ales în alte ecuații decât cea neidentificată). o astfel de operațiune trebuie să se justifice fie din perspectiva teoriei economice, fie din perspectiva criteriilor şi testelor statistice.

O altă soluție ar consta în excluderea unor variabile din ecuația neidentificată, în vederea creşterii numărului de variabile absente.

Ar mai putea fi o soluție opțiunea pentru o altă funcție, dacă se justifică din perspectiva specificării modelului.

Condiția de rang este un alt criteriu pentru stabilirea identificării: o ecuație dintr-un sistem de G ecuații structurale este identificată, dacă se poate forma cel puțin un determinant nenul de ordin $G – 1$, luând în considerare parametrii prezenți în alte ecuații şi care corespund variabilelor absente din ecuația respectivă.

8.3.2 Estimarea parametrilor

Marea majoritate a modelelor cu ecuații simultane sunt supraidentificate. Pe de altă parte, circularitatea unora dintre variabile în sensul că ele pot fi regăsite, fiecare, în postura de variabilă endogenă, dependentă de anumiți factori inclusiv de variabila reziduală (u), dar şi în postura de variabilă factorială în alte ecuații, cu valori dependente în continuare de variabila reziduală reprezintă o neconfirmare a unei ipoteze privind modelul. Este vorba de ipoteza independenței factorului în raport cu eroarea (u). Neconfirmarea ipotezei conduce la consecințe nedorite asupra estimatorului MCMMP (imprecizie, consistență afectată).

Astfel, MCMMP în varianta obişnuită nu conduce la estimații satisfăcătoare, motiv pentru care se recurge la alte variante de estimare.

Metoda celor mai mici pătrate în două stadii (etape) (MCMMP-2)

Etapele metodei sunt următoarele:

Stadiul 1: - în forma redusă a modelului se aplică MCMMP pentru fiecare ecuație de regresie în vederea obținerii estimatorilor $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, ...$. Pe baza acestor soluții estimate, precum şi pe baza valorilor variabilelor predeterminate (exogene + variabile cu efect întârziat), se obțin niveluri ajustate pentru variabilele endogene $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, ...)$;

Stadiul 2: - în forma structurală, în dreapta egalităților sunt căutate acele variabile factoriale care sunt de tip endogen. Toate aceste variabile endogene-factoriale (y) sunt înlocuite cu variabilele ajustate $(\hat{y})$ obținute în finalul primului stadiu, după care se trece la aplicarea MCMMP pentru fiecare ecuație structurală astfel adaptată.

Mențiuni:

- se operează numai în partea dreaptă a egalităților, înlocuind valorile y_i pentru variabilele endogene factoriale cu valorile ajustate $\hat{y}_i$ obținute pe baza variabilelor predeterminate în forma redusă;
- prin includerea de valori ajustate $(\hat{y})$ s-a rupt legătura nedorită dintre evoluția factorului (de tip endogen) şi eroare – u_i. Valorile ajustate, generate de model, se deosebesc de cele empirice (y_i) prin faptul că exclud rolul variabilei reziduale.

Exemplu: Modelul cu ecuații simultane

$y_1 = b_{11} + a_{11}y_2 + b_{12}x_1 + u_1$

$y_2 = b_{21} + b_{22}x_2 + u_2$

$y_3 = y_2 - y_1$

poate fi utilizat în vederea analizei şi prognozei cheltuielilor şi veniturilor familiei, unde: y_1 = cheltuieli; y_2 = venituri; x_1 = servicii utilizate; x_2 = ore de activitate remunerate; y_3 = sold (economii).

Datele sunt următoarele:

y_1	2	2	3	4	4	3	5	4	5	4	5	6	6	6
y_2	4	5	5	5	6	6	6	7	8	7	8	9	10	9
x_1	0,5	0,5	0,8	1	1	1	0,8	1	2	1	2	2	2	2
x_2	160	160	165	170	170	170	180	180	200	180	200	200	190	200

Stadiul 1: în forma redusă:

$$y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + v_1$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + v_2$$

se aplică pentru fiecare ecuație MCMMP.

Rezultă: $\alpha_0 = -8{,}13; \alpha_1 = 0{,}4083; \alpha_2 = 0{,}0656; \beta_0 = -12{,}3686; \beta_1 = 0{,}1062.$

Se înlocuiesc parametrii obținuți:

$y_1 = -8{,}13 + 0{,}4083\, x_1 + 0{,}0656\, x_2$

$y_2 = -12{,}3686 + 0{,}1062\, x_2$

Se determină valorile ajustate.

Stadiul 2: în forma structurală se înlocuiesc valorile y_2 din membrul drept cu valorile ajustate $\hat{y}_2$ şi se estimează cu MCMMP parametrii din ecuația formei structurale:

$$y_1 = a_0 + a_1 \hat{y}_2 + a_2 x_1$$

obținându-se: $\hat{a}_0 = -0{,}49; \hat{a}_1 = 0{,}6177; \hat{a}_2 = 0{,}4083.$

Pentru ecuația a doua din forma structurală, $\hat{b}_0 = \hat{\beta}_0; \hat{b}_1 = \hat{\beta}_1.$

Metoda celor mai mici pătrate în trei stadii (etape) (MCMMP-3)

Varianta metodei în 3 stadii include un filtru suplimentar în vederea înlăturării eventualelor elemente comune ale variabilelor reziduale din diversele ecuații legate prin prezența unor variabile în dublă postură (efect într-o ecuație, cauză în alta). Filtrul suplimentar este reprezentat de matricea varianțelor-covarianțelor, notată cu *M*.

Etapele metodei sunt următoarele:

Stadiul 1: - în forma redusă se aplică MCMMP, se obțin estimații $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \ldots$, precum şi valori ajustate $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots$;

Stadiul 2: - în forma structurală sunt înlocuite, în dreapta egalităților, variabilele endogene factoriale cu cu valorile ajustate obținute în etapa 1. Se aplică MCMMP, se obțin estimații $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots$, valori ajustate pentru toate variabilele endogene, precum şi valori ale variabilelor reziduale obținute prin scădere $y_i - \hat{y}_i$ în fiecare ecuație de regresie. Deci, se repetă etapele MCMMP în două stadii. Un calcul pregătitor pentru stadiul 3 ar presupune obținerea dispersiilor reziduurilor $\sum u^2 / (n-k)$, rezultate din fiecare ecuație, precum şi covarianța pentru ecuații luate câte două.

Stadiul 3: - destinat obținerii simultane a estimațiilor $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots$ pe ansamblul formei structurale. În acest scop este utilizată formula generalizată elaborată de A. C. Aitken:

$$\hat{B} = \left(Z' \hat{M}^{-1} Z\right)\left(Z' \hat{M}^{-1} Y\right)$$

unde:

$\hat{B}$ - vector coloană al tuturor parametrilor ecuațiilor structurale din model;

Z - matrice diagonală a variabilelor factoriale (endogene ajustate, exogene, variabile cu efect întârziat, variabila artificială, de element 1, destinată estimării parametrilor liberi a_0, b_0, ..., etc.);

Y - vector coloană al valorilor variabilelor endogene.

Dimensiunile enorme ale elementelor relației fac ca aplicarea ei să fie condiționată de existența unui model adecvat în programele de calculator.

Metoda celor mai mici pătrate indirectă

Varianta indirectă a MCMMP este recomandată în cazurile în care modelul include ecuații identificate (perfect). Procedeul prezintă interes din punct de vedere teoretic, pentru că aceste cazuri sunt rareori întâlnite în practică.

Metoda presupune ca în forma redusă să se obțină estimații $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_0, \ldots$ prin MCMMP. Soluțiile sunt utilizate în vederea estimării parametrilor în forma structurală, dar prin o nouă aplicare a MCMMP, ci avându-se în vedere diferitele relații de natură algebrică dintre parametrii formei reduse şi parametrii formei structurale.

În exemplul anterior, prima ecuație este identificată. Forma redusă a acesteia $y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + v_1$, în urma estimării $(\alpha_0 = -8{,}13; \alpha_1 = 0{,}4083; \alpha_2 = 0{,}0656)$ va reprezenta în stânga egalității variabila y_1, iar $y_2 = -12{,}3686 + 0{,}1062\, x_2 + u$ va înlocui variabila y_2.

Prima ecuație a formei structurale:

$y_1 = a_0 + a_1 y_2 + a_2 x_1 + u_1$

se rescrie astfel:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + v_1 = a_0 + a_1\left(\beta_0 + \beta_1 x_2 + v_2\right) + a_2 x_1 + u_1$$

Se regrupează termenii şi se obține:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = (a_0 + a_1\beta_0) + a_1\beta_1 x_2 + a_2 x_1 + (u_1 + a_1 v_2 - v_1)$$

Dar $\hat{a}_2 = \hat{\alpha}_1 = 0{,}4083$.

$\alpha_2 = a_1\beta_1$, de unde rezultă:

$$\hat{a}_1 = \frac{\alpha_2}{\beta_1} = \frac{0{,}0656}{0{,}1062} = 0{,}6177$$

$\alpha_0 = a_0 + a_1\beta_0 = a_0 + 0{,}6177 \cdot (-12{,}3686)$, de unde rezultă:

$\hat{a}_0 = -8{,}13 + 7{,}64 = -0{,}49.$

Estimarea parametrilor a avut în vedere cazul liniar. Introducerea de reprezentări neliniare pot depăşi etapa estimării prin utilizarea unor algoritmi specifici.

O particularizare a reprezentărilor cu ecuații simultane care complică estimarea constă în prezența ecuațiilor liniare alături de cele neliniare, precum şi a celor relativ independente în sistem, alături de ecuații legate de alte ecuații prin variabile comune, aflate într-o dublă postură.

În principiu, etapa estimării în astfel de situații presupune o prealabilă grupare a egalităților, astfel încât rezultă:

- grupa ecuațiilor independente – pentru care MCMMP poate fi aplicată în varianta obişnuită;
- grupa ecuațiilor interdependente, care, la rândul ei se subdivide în blocuri de ecuații în raport cu legăturile presupuse de circularitatea unor variabile. Pentru fiecare dintre blocurile astfel formate se aplică MCMMP-2 sau MCMMP-3;
- grupa identităților formate din egalități care includ relații de definire.

8.3.3 Etapa de verificare

Înainte de a se trece la utilizarea modelului econometric este parcursă etapa de verificare, axată pe următoarele direcții:

– verificarea statistică a semnificației rezultatelor estimării, precum şi a confirmării ipotezelor modelului şi a metodei de estimare;

- verificarea din perspectiva gradului de determinare, precum şi a preciziei valorilor generate de model în raport cu valorile empirice;
- verificarea prin simularea de situații şi comparații în raport cu aşteptările.

În ceea ce priveşte testarea statistică, procedura presupune aplicarea testelor *t*, *F*, *GQ*, *DW*, *JB* etc. asupra rezultatelor (estimații, valori reziduale) fiecărei ecuații de regresie din forma structurală.

Modalitatea de verificare este cea a modelului cu o singură ecuație, dar testele se aplică de un număr de ori egal cu numărul de ecuații. La fel se pune problema în ceea ce priveşte determinația (R^2) şi criteriul AIC.

Verificarea prin simulare urmăreşte testarea modelului în ansamblul său, privit ca un produs care are calitatea de a reproduce realitatea din care provine.

În general, modul de lucru are în vedere:

- atribuirea de valori variabilelor exogene, valori apropiate de cele reale, pentru a obține un prim set de niveluri ajustate pentru variabilele endogene;
- introducerea de influențe indirecte printr-un procedeu iterativ care presupune ca într-o a doua etapă să se înlocuiască variabilele endogene factoriale cu valorile generate de model în prima etapă şi obținerea de noi valori ajustate pentru toate variabilele aflate în stânga egalităților în forma structurală;
- compararea valorilor generate de ultima iterație cu ceea ce s-a obținut în precedenta iterație: dacă diferențele se mențin mari se reia procesul iterativ; dacă diferențele sunt acceptabil de mici se încheie acest proces.

Printr-o astfel de verificare se pun în evidență sectoarele fragile ale modelului, adică acele ecuații pentru care abaterile dintre valorile generate de model şi valorile empirice se mențin mari în urmamai multor iterații.

Îm cazul în care modelul econometric este destinat obținerii de previziuni cât mai precise, se recomandă verificarea calității specificării modelului în raport cu precizia **prognozelor ex-post**. Acest gen de prognoze se referă la perioade pentru care se cunosc date reale şi posibilitatea testării preciziei prognozei. Ultimele *s* perioade

din întregul interval de *n* perioade formează segmentul de timp martor destinat verificării preciziei prognozei. Previziunea se bazează pe estimații obținute pentru *n – s* valori şi se referă la evoluția viitoare a ultimelor *s* valori ale variabilei endogene.

În cazul în care au fost elaborate două sau mai multe variante de model, se optează pentru acea variantă care generează predicțiile cele mai apropiate de nivelul datelor reale din segmentul martor. După ce s-a ales varianta de model, se reia procesul de estimare şi elaborare de predicții, utilizând toate cele *n* valori din setul de date.

8.4 Analiză, simulare şi prognoză

Analiza economică bazată pe rezultatele modelului cu ecuații simultane se focalizează îndeosebi pe soluțiile ce privesc parametrii de regresie. Interpretarea fiecărui parametru estimat în forma structurală a modelului se recomandă să fie precedată de o apreciere critică a soluției care să țină seama de:

- semnificația estimației în sensul testului *t*;
- semnul parametrului (plus, minus) şi concordanța acestuia în raport cu ceea ce se cunoaşte din teoria şi practica economică cu privire la sensul legăturii (sens direct proporțional sau sens invers proporțional) dintre variabila factorială şi variabila endogenă din stânga semnului egal;
- gradul de determinare al variabilei explicate (*y*) de către factorii incluşi în ecuația structurală respectivă (R^2);
- aprecierea posibilității ca multicoliniaritatea să afecteze estimațiile (un grad scăzut de interdependență a factorilor din ecuația respectivă, un nivel R^2 apropiat de 1 coroborat cu un nivel *DW* foarte apropiat de 2 ar fi de dorit în cazul ecuațiilor cu mai mulți factori incluşi).

Dacă în urma unor astfel de aprecieri nuapar suspiciuni întrucât: estimația este semnificativă, semnul parametrului este cel aşteptat, determinația este mare, iar riscul multicoliniarității este mic, se poate avea încredere în interpretarea economică a estimației. O astfel de interpretare se poate referi la:

- aprecirea rolului fiecărui factor (estimare a coeficientului marginal) inclusiv a însemnătății acestuia în raport cu alți factori incluşi în ecuație;
- analiza comparativă a rolului factorilor în raport cu alte perioade sau cu alte țări;
- opțiunea pentru factorii care ar putea avea însemnătate pentru simulare datorită rolului lor în structura procesului descris de sistemul de ecuații;
- aprecierea legăturilor existente între diversele blocuri de ecuații ale modelului (blocul de ecuații privind producția sau consumul sau sectorul financiar-bancar) prin urmărirea rolului variabilelor de legătură (acele variabile care într-un bloc de ecuații apar ca efecte, iar într-un alt bloc apar în postura de factori). În acest sens, prezintă interes evidențierea relațiilor de conexiune inversă (feed-back), ca şi a lanțurilor cauzale din economie.

Simularea reprezintă etapa cea mai interesantă în demersul econometric întrucât prin intermediul ei pot fi cunoscute cu anticipație implicațiile pe care le generează în economie modificarea unor variabile de tip exogen, precum: impozitele, rata scontului, cheltuielile guvernamentale etc.

Prin modificarea unor astfel de variabile guvernul îşi pune în aplicare politica sa economică şi este interesat în cunoaşterea din timp, dacă se poate înainte de punerea în practică a unor decizii, a efectelor acestor decizii.

În eventualitatea existenței unor alternative de politică economică, guvernul este interesat, în opțiunea sa, de efectele anticipate ale acestor politici. La nivel de firmă există, de asemenea, interesul pentru cunoaşterea din timp, în urma unor calcule, a rezultatelor anticipate, fie şi cu aproximație, pe care unele modificări în strategia firmei (privind investițiile, personalul, reclama, promovarea vânzărilor) le vor aduce, precum şi a influențelor acestora asupra profitului.

Simularea de natură econometrică permite astfel de experimente şi, în măsura în care modelul este corect specificat şi suficient de detaliat, se poate ajunge la soluții care permit o conducere anticipativă, mereu în cunoştință de cauză cu privire la urmările deciziilor puse în aplicare.

Simularea presupune ca în forma redusă a modelului să se procedeze la modificarea unor variabile exogene (cele de comandă, în sensul că pot fi modificate prin decizii, legi, ordonanțe) în limita posibilităților de manevră ale acestora. Corespunzător, vor rezulta modificări ale variabilelor endogene. Pot fi avute în vedere mai multe alternative de modificare a variabilelor exogene şi, corespunzător, se va ajunge la mai multe alternative de răspuns în ceea ce priveşte efectele. Din aceste încercări aplicate modelului, cu ajutorul calculatorului, pot rezulta alternative de real interes pentru cel preocupat de realizarea unor obiective într-un proces complex cum este cel economic.

Prima etapă a simulării constă în stabilirea unei evoluții-martor, de bază, la care s-ar ajunge dacă totul rămâne cum a fost, respectiv dacă modificările sunt cele care s-ar obține în condiții obişnuite. Alături de endogenele din varianta de bază pot fi menționate nivelurile-obiectiv la care urmărim să ajungem prin politica economică promovată.

Simulările bazate pe modelul econometric pot fi realizate şi în alte scopuri sau pot presupune intervenții asupra altor elemente din model. Astfel, pot fi avute în vedere:

- simulări privind verificarea capacității modelului de repreducere a realității (a datelor empirice);
- modificări de amploare asupra unei singure variabile exogene (celelalte fiind menținute constante);
- modificări asupra valorilor estimate ale parametrilor dacă există motive cu privire la diminuarea / amplificarea influenței unor factori într-un context schimbat, posibil a fi realizat în viitor;
- generarea de valori reziduale aleatoare, corespunzător unei repartiții prestabilite şi stabilirea limitelor între care se vor situa variabilele endogene dacă se ține seama şi de elementele aleatoare din economie.

Obținerea de valori simulate presupune un rol activ al celui care exploatează modelul, în sensul explorării efectelor diverselor modificări ale factorilor pe care se bazează politica economică şi căutării acelei variante care, cu costuri materiale şi sociale minime, să apropie procesul economic de obiectivele preconizate.

Previziunea evoluției fenomenelor economice reprezintă, de cele mai multe ori, obiectivul final în cadrul modelări econometrice. Ea constituie proba validității modelului elaborat. Spre deosebire de prognozele bazate pe studiul seriilor cronologice, al căror caracter inerțial este recunoscut, predicțiile generate de modelul econometric cu ecuații simultane urmăresc să prefigureze viitorul unor importante variabile economice în raport cu influențele directe şi indirecte exercitate asupra lor de către variabilele exogene.

Întrucât predicția se bazează pe un număr mare de elemente (variabile exogene, influențe întârziate, influențe indirecte), abordate în interacțiune în contextul relațiilor cauză-efect, se poate afirma că modelul econometric cu ecuații simultane reprezintă o modalitate relativ bine fundamentată de cunoaştere anticipativă în economie.

Predicțiile rezultate dintr-un sistem de ecuații simultane se obțin astfel: în forma redusă a modelului econometric se atribuie variabilelor exogene valori preconizate (rezultate din calcule preliminarii, alocări planificate de resurse, procese în curs de finalizare, intenții sau ipoteze de lucru) pentru perioada de prognoză; variabilelor cu efect întârziat li se atribuie valori empirice (pentru perioadele ..., $n - 2$, $n - 1$), respectiv valori previzionate dacă predicțiile sunt pe termen mediu sau lung. Se determină apoi viitoarele valori pentru variabilele endogene, corespunzător relației:

$$y^* = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_1^{(0)} + ... + \hat{\alpha}_k x_k^{(0)}$$

unde $x^{(0)}$ reprezintă valori preconizate pentru viitor.

Predicțiile astfel obținute depind, în ceea ce priveşte precizia, de realizarea următoarelor condiții:

- valorile atribuite variabilelor exogene se vor realiza;
- comportamentul constatat în trecut, mai precis în intervalul $t = 1, 2, ..., n$, în ceea ce priveşte relațiile dintre variabilele modelului, nu se va modifica substanțial, astfel încât structura exprimată prin parametrii de regresie va rămâne, în general, neschimbată;
- nu vor interveni noi factori semnificativi şi nici situații catastrofale care să modifice esențial condițiile de desfăşurare ale procesului prognozat.

O modalitate de îmbunătățire a performanțelor prognosticate ale acestui tip de model constă în depăşirea cadrului strict aritmetic al determinării predicțiilor. Ieşirea din acest cadru presupune:

- luarea în considerare a rezulatelor simulării şi cu deosebire a soluțiilor simulate pentru cele mai recente perioade de timp, în sensul reevaluării şi ajustării predicţiilor;
- utilizarea informațiilor de natură calitativă în vederea ajustării prognozelor şi apropierii lor de realitate;
- asigurarea unui rol în previzionare experienței şi intuiției economiştilor şi aceasta îndeosebi în stadiul de finalizare a rezultatelor.

În elaborarea unor studii concrete privind viitorul, se recomandă următoarele etape în realizarea prognozei prin modelul cu ecuații simultane:

- pregătirea: analiza atentă a rezultatelor etapei de verificare şi cu deosebire a preciziei prognozelor ex-post; obținerea de date preconizate (anticipări, obiective prestabilite, valori plauzibile a fi realizate în viitor);
- elaborarea prognozei în varianta inițială şi analiza soluțiilor obținute. În forma redusă a modelului se obțin predicții utilizând cele mai plauzibile niveluri privind evoluția variabilelor exogene în viitor. La aceasta poate fiadăugată o variantă optimistă (valorile atribuite variabilelor exogene sunt cele considerate optime), precum şi o variantă pesimistă (valorile atribuite sunt cele la care s-ar ajunge într-o conjunctură nefavorabilă). Analiza prognozelor inițiale din diverse perspective (a economistului-analist, a viitorologilor, a beneficiarilor) poate conduce, în final, la stabilirea unei variante de bază;
- întreținerea modelului în sensul actualizării sale prin introducerea de noi date, verificări periodice, reluarea etapelor estimării, actualizarea percepției cu privire la valorile anticipate atribuite variabilelor exogene.

8.5 Modele macroeconometrice

În decursul timpului s-au creat modele econometrice de mari proporții, intens dezagregate, care au fost şi continuă să fie utilizate, dar şi perfecționate în diverse țări ale lumii.

Modelul Klein-Goldberger oferă o primă reprezentare concentrată a tot ceea ce ulterioarele ansambluri au încercat să redea,

într-o formă dezagregată, prin sute de ecuații. Modelul este de tip keynesian clasic şi include 12 ecuații de regresie şi 5 identități. Ecuațiile se referă la economia reală (consum, investiții, venit), la prețuri-salarii, iar prin relațiile privind cererea de lichidități este prefigurat blocul monetar-financiar.

Modelul Bookings SSRC a fost inițial destinat controlului economiei naționale în vederea menținerii economiei SUA în stare de stabilitate. Dezvoltarea ulterioară a modelului a urmărit, pe de o parte, conectarea la marile modele (SCN, BLR), iar pe de altă parte, realizarea unui grad de detaliere deosebit şi îmbinarea diverselor blocuri de ecuații prin bucle care descriu influența reciprocă.

Modelul Wharton EFU se referă de asemenea la economia SUA, include sute de ecuații şi este destinat îndeosebi prognozei. Principalele blocuri de ecuații se referă la consum, investiții, export, import, prețuri, salarii, depreciere, impozite, rata dobânzii etc. Ecuațiile sunt, în general, neliniare în raport cu variabilele. Metoda de estimare utilizată cu precădere este MCMMP-2.

Modelul metric se referă la economia Franței şi se particularizează prin: numărul mare de identități, variabile ale căror niveluri provin din anchete conjuncturale, includerea de numeroşi factori cu efect întârziat sau care includ valori anticipate.

Modelul Bank of England (BE), fundamentat pe teoria keynesiană, se particularizează prin detalierea relațiilor financiar bancare.

Modelele menționate sunt câteva dintre cele care au apărut în anii 1960-70. În general, fiecare țară dezvoltată şi-a creat propriul model în vederea simulării de politici economice, prognozei şi analizei. Modelul cu ecuații simultane elaborat de către academicianul Emilian Dobrescu privind economia României se înscrie în această arie de preocupări. De asemenea, băncile centrale (BNR în țara noastră) şi-au creat propriile modele care continuă să fie perfecționate.

Bibliografie

Andrei T., 2008, *Econometrie*, Editura Economica Bucureşti;

Andrei T., Spircu L., 2010, *Aplicaţii în econometrie*, Editura Economica Bucureşti;

Andrei T., 2004, *Statistică şi econometrie*, Editura Economică, Bucureşti;

Andrei T., Bourbonnais R., 2009, *Econometrie*, Editura Economica, Bucureşti;

Cristache, S. E., Serban D., 2007; *Lucrari aplicative de statistica sieconometrie pentru administrarea afacerilor*; Ed. ASE Bucuresti

Despa, R., Solomon O., Caraiani P., Din M. A., 2010, *Econometrie*, Editura Universitară, Bucureşti;

Gâf-Deac I., 2007, *Econometrie*, Editura Fundaţiei „România de Mâine", Bucureşti;

Iacob A. I., Tănăsoiu O., 2005, *Modele econometrice*, Editura ASE, Bucureşti;

Iacob A. I., Tănăsoiu O., 2005, *Econometrie. Studii de caz*, Editura ASE, Bucureşti;

Jemna D., 2009 ; *Econometrie Editia II-a*; Editura Secom Libris, Iasi

.Jemna D., Pintilescu C., Turturean C., 2009; *Econometrie.Probleme si teste grila*; Editura Secom Libris, Iasi

Nenciu E., Gagea M., 2010; *Lectii de econometrie*; Ed. Tehnopress ,Iasi

Niculescu-Aron, I. G., Mazurencu-Marinescu, M., 2007; *Metode econometrice pentru afaceri*; Ed. ASE Bucuresti

Pecican E. Ş., 2006, *Econometrie*, Editura C. H. Beck, Bucureşti;

Pecican E., 2004, *Econometrie... pentru economişti. Econometrie. Teorie şi aplicaţii*, Editura Economică, Bucureşti;

Pecican E., Tănăsoiu O, Iacob A. I., 2001, *Modele econometrice*, Editura ASE, Bucureşti;

Spătaru S., 2007, *Modele şi metode econometrice*, Editura ASE Bucureşti;

Spircu L., Ciumara R., 2007, *Econometrie*, Editura Pro Universitaria, Bucureşti;

Spircu, L., 2008, *Econometrie*, Editura Pro Universitaria, Bucureşti;

Tasnadi, A., 2005, *Econometrie*, Editura ASE Bucureşti;

Tomescu Dumitrescu C., 2008, *Econometrie generală şi financiară*, EDP Bucureşti;

Voineagu V., Titan E., 2007, *Teorie şi practică econometrică*, Editura Meteor Press, Bucureşti.

Zait D., Nica P., 1995; *Introducere in modelarea econometrica*; Ed. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi

ASE Bucureşti- cursuri în format digital http://www.biblioteca-digitala.ase.ro

Anexe

Distribuția normală redusă (standard)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,239	0,027	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,179
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	,02611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4727	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,5826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4874	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4816
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,491	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4978	0,4978	0,4080	0,4891
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Distribuția t Student în funcție de probabilitatea *P* şi de numărul gradelor de libertate

	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	63,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	3,99	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,401
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	2,58	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,391	0,533	0,687	0,860	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,649
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,656
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Valori critice pentru repartiția *F*

l_2	$l_{1=1}$		$l_{1=2}$		$l_{1=3}$		$l_{1=4}$		$l_{1=5}$	
	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$
1	161,4	4 052	199,5	4 999	215,7	5 403	224,6	5 625	230,2	5 764
2	18,51	98,49	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,81	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	15,98	6,26	15,52
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,05	10,97
6	5,99	13,74	5,14	10,91	4,76	9,78	4,53	9,15	4,39	8,75
7	5,59	12,25	4,74	9,55	4,35	8,45	4,12	7,85	3,97	7,45
8	5,32	11,26	4,46	8,65	4,07	7,59	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,55	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,20	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,88	6,93	3,49	5,95	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,80	6,70	3,41	5,74	3,18	5,20	3,02	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,51	3,34	5,56	3,11	5,03	2,96	4,69
15	4,54	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,28	3,55	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,94	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,38	5,57	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,86
26	4,22	7,72	3,37	5,53	2,98	4,64	2,74	4,14	2,59	3,82
27	4,21	7,68	3,35	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,57	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,45	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,54	2,70	4,04	2,54	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,51	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,45	3,51
60	4,00	7,08	3,15	4,98	2,76	4,13	2,52	3,65	2,37	3,34
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,95	2,45	3,48	2,29	3,17
∞	3,84	6,64	2,99	4,60	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02

l_2	$l_{1=6}$		$l_{1=8}$		$l_{1=12}$		$l_{1=24}$		$l_{1=a}$	
	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$
1	234,0	5 859	238,9	5 981	243,9	6 106	249,0	6 234	254,3	6 366
2	19,33	99,33	19,37	99,36	19,41	99,42	19,45	99,46	19,50	99,50
3	8,94	27,91	8,84	27,49	8,74	27,05	8,64	26,60	8,53	26,12
4	6,16	15,21	6,04	14,80	5,91	14,37	5,77	13,93	5,63	13,46
5	4,95	10,67	4,82	10,27	4,68	9,89	4,53	9,47	4,36	9,02
6	4,28	8,47	4,15	8,10	4,00	7,72	3,84	7,31	3,67	6,88
7	3,87	7,19	3,73	6,84	3,57	6,47	3,41	6,07	3,23	5,65
8	3,58	6,37	3,44	6,03	3,28	5,67	3,12	5,28	2,93	4,86
9	3,37	5,80	3,23	5,47	3,07	5,11	2,90	4,73	2,71	4,31
10	3,22	5,39	3,07	5,06	2,91	4,71	2,74	4,33	2,54	3,91
11	3,09	5,07	2,95	4,74	2,79	4,40	2,61	4,02	2,40	3,60
12	3,00	4,82	2,85	4,50	2,69	4,16	2,50	3,78	2,30	2,36
13	2,92	4,62	2,77	4,30	2,60	3,96	2,42	3,59	2,21	3,16
14	2,85	4,46	2,70	4,14	2,53	3,80	2,35	3,43	2,13	3,00
15	2,79	4,32	2,64	4,00	2,48	3,67	2,29	3,29	2,07	2,87
16	2,74	4,20	2,59	3,89	2,42	3,55	2,24	3,18	2,01	2,75
17	2,70	4,10	2,55	3,79	2,38	2,45	2,19	3,08	1,96	2,65
18	2,66	4,01	2,51	3,71	2,34	3,37	2,15	3,00	1,92	2,57
19	2,63	3,94	2,48	3,63	2,31	3,30	2,11	2,92	1,88	2,49
20	2,60	3,87	2,45	3,56	2,28	3,23	2,08	2,86	1,84	2,42
21	2,57	3,81	2,42	3,51	2,25	3,17	2,05	2,80	1,81	2,36
22	2,55	3,76	2,40	3,45	2,23	3,12	2,03	2,75	1,78	2,31
23	2,53	3,71	2,38	3,41	2,20	3,07	2,00	2,70	1,76	2,26
24	2,51	3,67	2,36	3,36	2,18	3,03	1,98	2,66	1,73	2,21
25	2,49	3,63	2,34	3,32	2,16	2,99	1,96	2,62	1,71	2,17
26	2,47	3,59	2,32	3,29	2,15	2,96	1,95	2,58	1,69	2,13
27	2,46	3,56	2,30	3,26	2,13	2,93	1,93	2,55	1,67	2,10
28	2,44	3,53	2,29	3,23	2,12	2,90	,191	23,52	1,65	2,06
29	2,43	3,50	2,28	3,20	2,10	2,87	1,90	2,49	1,64	2,03
30	2,42	3,47	2,27	3,17	2,09	2,84	1,89	2,47	1,62	2,01
40	2,34	3,29	2,18	2,99	2,00	2,66	1,79	2,29	1,51	1,80
60	2,25	3,12	2,10	2,82	1,92	2,50	1,70	2,12	1,39	1,60
120	2,17	2,96	2,01	2,66	1,83	2,34	1,61	1,95	1,25	1,38
∞	2,09	2,80	1,94	2,51	1,75	2,18	1,52	1,79	1,00	1,00

Distribuția χ^2

F \α	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,001
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70